Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1920. 7. Abhandlung

Paul Stäckel †

Von

OSKAR PERRON
in Heidelberg

Eingegangen am 14. April 1920

Heidelberg 1920
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1566

Am 12. Dezember 1919 schied das ordentliche Mitglied unsrer Akademie, Paul Stäckel, aus dem Leben. Mit ihm ist ein außerordentlich vielseitiger, kenntnisreicher und arbeitsfroher Mathematiker dahingegangen, betrauert von zahlreichen Freunden und von der gesamten mathematischen Wissenschaft, der er so manches Kleinod geschenkt hat; und noch manches war in Aussicht gestellt, was er nicht mehr geben konnte, da der grausame Tod ihn allzufrüh mitten aus seinem Schaffen gerissen.

Paul Stäckel ist geboren am 20. August 1862 in Berlin. Er besuchte daselbst das Joachimsthalsche Gymnasium, wo schon früh seine Begabung für Mathematik zutage trat, und wo namentlich der ausgezeichnete Unterricht der von ihm stets verehrten Lehrer Prof. Dr. Schindler und Prof. Dr. Seebeck ihn für diese Wissenschaft begeistert hat. Das Reifezeugnis trägt den Vermerk: »In der Mathematik, der er stetig ein lebhaftes Interesse bewies, hat er, durch gute Anlagen für diesen Unterrichtsgegenstand unterstützt, Hervorragendes zu leisten vermocht und sich eine klare und eindringende Einsicht in den Organismns des Lehrgebäudes, umfassende und parate Kenntnisse und Sicherheit und Gewandtheit in der Analyse erworben. Seine schriftliche Prüfungsarbeit war vorzüglich. Auch für die Physik bewies er stetige Teilnahme und klares Verständnis.«

Seine Studienzeit verbrachte Stäckel in Berlin, wo er 1885 promovierte. 1891 habilitierte er sich in Halle und war dann der Reihe nach als Professor tätig an den Universitäten und Technischen Hochschulen Königsberg, Kiel, Hannover, Karlsruhe, Heidelberg. Zahlreiche weitere Berufungen hat er abgelehnt.

Stäckels Lehrer an der Berliner Universität waren hauptsächlich Weierstrass, Kronecker, Kummer, Helmholtz, Kirchhoff. In dieser glänzenden Schule hat er sich eine solide Grundlage für seine wissenschaftlichen Arbeiten erworben, für die er seinen Lehrern zeitlebens dankbar war; besonders der Einfluß von Weierstrass ist bei ihm unverkennbar. Gleichwohl kann man Stäckel nicht als speziellen Schüler von irgendeinem seiner

Lehrer bezeichnen. Vielmehr zeigt sich schon in seinen ersten Arbeiten die Selbständigkeit seines Denkens. Dabei gibt es auf den weiten Gefilden der Mathematik kaum ein Gebiet, auf dem er sich nicht betätigt hätte. Analysis, Geometrie, Mechanik, Geschichte der Mathematik, Unterrichtswesen: all diese Zweige haben reichste Förderung durch ihn erfahren. Es ist nicht möglich, im Rahmen dieses kurzen Abrisses all seinen wissenschaftlichen Leistungen gerecht zu werden. Nur das Wichtigste soll in großen Linien zu zeichnen versucht werden.

In seiner Dissertation beschäftigt sich Stäckel mit einem Problem der Mechanik, der Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, wenn eine Kräftefunktion existiert, die von der Zeit nicht abhängt. Bereits hier sehen wir deutlich die Keime für mehrere fruchtbare Gedanken, zu denen Stäckel später wiederholt zurückgekehrt ist. So wird bemerkt, daß die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung des Problems unverändert bleibt, wenn die Fläche irgendwie verbogen wird, und die Kräftefunktion dabei in gewisser Weise der Verbiegung folgt. Wenn daher für das ursprüngliche Problem die Lösung gefunden ist, so sind unzählig viele andre Probleme ebenfalls gelöst; die Bahnkurven auf der verbogenen Fläche sind dabei einfach die Kurven, welche aus den Bahnkurven der ursprünglichen Fläche bei der betreffenden Verbiegung hervorgehen. Darin erkennt man die erste Spur für ein Prinzip, das Stäckel später als »analytische Äquivalenz dynamischer Probleme« bezeichnet hat. Es besteht darin, daß die Differentialgleichungen eines dynamischen Problems stets mehrere Interpretationen zulassen, indem auch andre Probleme zu den nämlichen Gleichungen führen, wo dann nur die auftretenden Größen andre Bedeutung haben. Im 107. Bande des Crelleschen Journals, auf Seite 324, sagt Stäckel: »Es ist zu unterscheiden zwischen der mechanischen Einkleidung und dem analytischen Kern der dynamischen Probleme. Die Lösung eines einzigen analytischen Problems liefert häufig die Mittel, ganz verschiedenartige dynamische Probleme zu erledigen, indem es nur darauf ankommt, die gewonnenen Funktionen der Zeit vom Standpunkte der Mechanik aus zu deuten und zu diskutieren.«

Um die Sache an dem einfachsten Beispiel klar zu machen, denken wir uns k materielle Punkte, die sich mit n Freiheitsgraden bewegen, der Einfachheit halber ohne Wirkung von äußeren

Kräften. Die $3k$ rechtwinkligen Koordinaten $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$ der k Punkte lassen sich dann durch n unabhängige Variable $q_1, \ldots, q_n$ (allgemeine Lagrangesche Koordinaten) ausdrücken, und es ist die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda} m_\lambda \left(\dot{x}_\lambda^2 + \dot{y}_\lambda^2 + \dot{z}_\lambda^2\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\,\dot{q}_\lambda\,\dot{q}_\mu$$

eine quadratische Form der Ableitungen $\dot{q}_\lambda = dq_\lambda/dt$, wobei die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ von den q_ν abhängen. Die Bewegungsgleichungen sind dann bekanntlich die folgenden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = 0.$$

Hat man nun irgendein andres System von materiellen Punkten, wieder mit n Freiheitsgraden, und derart, daß die lebendige Kraft bei geeigneter Wahl der n unabhängigen Variablen sich durch die nämliche quadratische Form wie oben ausdrückt, so erhält man dieselben Bewegungsgleichungen; all diese Probleme sind analytisch äquivalent.

Unter den äquivalenten Problemen ist eines ganz besonders einfach, nämlich die Bewegung eines einzigen Punktes in einem n-dimensionalen Riemannschen Raume, dessen Bogenelement die Quadratwurzel aus der positiv definiten quadratischen Differentialform

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\, dq_\lambda\, dq_\mu$$

ist. Dieser Zusammenhang veranlaßte Stäckel, auch der Mechanik mehrdimensionaler und Nichteuklidischer Räume seine Aufmerksamkeit zu widmen. Er hat über diesen Gegenstand der Deutschen Mathematikervereinigung auf der Naturforscherversammlung in Kassel im Jahr 1903 in einem Vortrage berichtet, in dem er zeigte, daß die Beschäftigung mit mehrdimensionalen Räumen nicht nur Sache einiger abstrakt veranlagter Idealisten ist, sondern daß auch sehr konkrete Erscheinungen unsres gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes sich viel einfacher übersehen lassen, wenn man die Begriffsbildungen n-dimensionaler Räume zu Hilfe nimmt.

untersuchte er die allgemeinere Frage nach dem Bestehen einer algebraischen Gleichung zwischen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$, wenn u und v selbst durch eine algebraische Gleichung verbunden sind; doch kann auf die Ergebnisse, die mit der Transformationstheorie der automorphen Funktionen zusammenhängen, hier nicht näher eingegangen werden.

Ebenfalls im 112. Band des CRELLEschen Journals hat STÄCKEL eine weitere sehr bemerkenswerte Untersuchung angestellt. Bekanntlich wechseln die Nullstellen von zwei linear unabhängigen Integralen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung miteinander ab, was wesentlich auf dem Nichtverschwinden der Determinante $f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)$ beruht. Die drei Kurven

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad y = 0$$

haben also die Eigenschaft, daß auf der dritten die Schnittpunkte mit der ersten und die Schnittpunkte mit der zweiten alternieren. STÄCKEL betrachtet nun an Stelle der obigen speziellen Kurven drei beliebige Kurven

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_3(x, y) = 0,$$

und fragt nach einer Bedingung dafür, daß die Schnittpunkte in gewisser Weise alternieren. Er kommt zu dem folgenden schönen Resultat: »Falls die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so liegt, wenn man eine der drei Kurven, etwa $f_3 = 0$, durchläuft, zwischen je zwei Schnittpunkten mit $f_1 = 0$ stets ein und nur ein Schnittpunkt mit $f_2 = 0$.« Aber auch diesen Satz verallgemeinert er noch ganz bedeutend, indem er ihn auf das n-dimensionale Gebiet ausdehnt.

Großes Interesse hat STÄCKEL den arithmetischen Eigenschaften analytischer Funktionen entgegengebracht. Eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten nimmt für rationale Argumentwerte offenbar nur rationale Funktionswerte an; dabei kann unter einer rationalen Zahl eine reelle rationale Zahl verstanden werden oder auch eine komplexe Zahl der Form $a+bi$, wo a und b reelle rationale Zahlen sind. Schon WEIERSTRASS hat erkannt, daß diese Eigenschaft nicht für die rationalen Funktionen charakteristisch ist, sondern daß es auch transzendente Funktionen mit der gleichen Eigenschaft gibt. In dem Bestreben, ein einfacheres derartiges Beispiel zu finden, gelangt STÄCKEL in Band 46 der Mathematischen Annalen zu dem folgenden schönen und weittragenden Theorem: »Ist P eine abzählbare, Q eine überall dichte Menge der komplexen Zahlenebene (oder auch beidemal nur der reellen Achse), so kann man auf unendlich viele Arten ganze transzendente Funktionen bilden, die für Argumentwerte aus der Menge P nur Funktionswerte aus der Menge Q annehmen.« Dabei ist die Konstruktion solcher Funktionen ganz elementar. Wählt man für P und Q speziell die Menge der rationalen Zahlen (im einen oder andern Sinn), so erhält man das WEIERSTRASSsche Ergebnis.

Eine ganz besondere Begabung hatte STÄCKEL für historische Forschungen. Seine Arbeiten auf diesem Gebiete sind so zahlreich und haben ein so wertvolles Material geliefert, daß mit ihnen allein ein Menschenleben reichlich ausgefüllt gewesen wäre. Zahlreiche seiner Arbeiten, die nicht auf historischem Gebiete liegen, zeigen gleichwohl einen historischen Einschlag, da er vielfach den von ihm behandelten Problemen eine historisch-kritische Einleitung vorausschickte, wobei er eine wunderbare Vertrautheit mit der Literatur des 18. Jahrhunderts offenbarte. Seine erste rein historische Arbeit erschien 1893 in den Berichten der Leipziger Akademie unter dem Titel: »Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien«. Welche Unsumme von Arbeit, welche Fülle von Material birgt sich hinter diesem bescheidenen Titel! Es sind wirklich nicht nur Bemerkungen, was STÄCKEL hier gibt; es ist vielmehr das vollständige Material für eine Geschichte von den Uranfängen bis über GAUSS hinaus.

Der ausgezeichnete Scharfsinn, mit dem STÄCKEL wertvolles historisches Material aufzuspüren verstand, zeigt sich in der Entdeckung von LAMBERTS Nachlaß in der Herzoglichen Bibliothek zu Gotha, in der Auffindung zahlreicher wertvoller Mathematikerbriefe, vor allem in der lückenlosen Aufhellung der Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie. In der ausgezeichneten Urkundensammlung zur Theorie der Parallellinien, die er zusammen mit ENGEL herausgegeben hat, finden sich neben den bekannten Namen noch die neuentdeckten SCHWEIKART und TAURINUS, denen er alsbald auch WACHTER zugesellt hat. Den Anteil eines jeden hat STÄCKEL aufs genaueste zergliedert, und so kommt es, daß wir heute über die Uranfänge der Nichteuklidischen Geometrie, die solange im Dunkeln lagen, genauer unterrichtet sind als über irgendein andres Gebiet. Mit welcher Liebe hat er insbesondere den Gedankengängen von JOH. BOLYAI nachzuspüren gesucht! Er scheute nicht Mühe und Arbeit, nicht die lange Reise nach Maros-Vásárhely, um jedes Blatt des Nachlasses aufs genaueste zu prüfen.

Und ebenso hat er die Ideengänge von GAUSS aus den spärlichen uns hinterlassenen Andeutungen zu rekonstruieren gesucht. Aber bei GAUSS handelt es sich nicht nur um die Nichteuklidische Geometrie. Der princeps mathematicorum hat ja auf allen Gebieten der Mathematik soviel besessen, was er der Öffentlichkeit vorenthielt. In diese reiche, aber schwer zugängliche Schatzkammer hineinzuleuchten, war für STÄCKEL eine dankbare Aufgabe, der er sich mit freudiger Hingabe unterzog. Sein Anteil an der Bearbeitung des 8. und namentlich des 10. Bandes der Werke und sein inhaltreicher Aufsatz »Gauss als Geometer«, der als 5. Heft der Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von GAUSS erschienen ist, sind Früchte dieser mühevollen Arbeit.

Aber größer noch ist das Verdienst, das STÄCKEL um die Herausgabe von EULERS Werken sich erworben hat. Als der schon von JACOBI eifrig propagierte, aber infolge seines Todes gescheiterte Plan zu einer Gesamtausgabe der Werke LEONHARD EULERS im Jahr 1907 auf RUDIOS Anregung erneut ins Auge gefaßt wurde, und als die Deutsche Mathematikervereinigung ihre Euler-Kommission einsetzte, da konnte zum Vorsitzenden dieser Kommission kein geeigneterer gefunden werden als STÄCKEL, der ausgezeichnete Euler-Kenner. Und er hat dieses Amt nicht als bloßes Ehrenamt angesehen, sondern hat ihm in aufopfernder, selbstloser Weise gedient und alle für den Druck nötigen Vorarbeiten mit bewundernswerter Kraft und Schnelligkeit selbst ausgeführt. Der gesamte Einteilungsplan ist im wesentlichen sein Werk. STÄCKEL gehörte außerdem dem Redaktionskomitee an und zeichnet für die beiden Bände der »Mechanica«, die schon 1912 erschienen sind, als Herausgeber.

Hier darf auch nicht unerwähnt bleiben, daß STÄCKEL mehrere Bändchen in der Sammlung »Ostwalds Klassiker« herausgegeben hat. Welch großer Dienst durch solche Neuausgabe und Kommentierung der historischen Forschung geleistet wird, weiß jeder Kenner zu würdigen.

Das lebhafteste Interesse hat STÄCKEL allen Fragen entgegengebracht, die mit dem mathematischen Unterricht zusammenhängen. Er war Mitglied des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, sowie der internationalen mathematischen Unterrichtskommission. Auch hierbei hat er sich nicht auf organisatorische Arbeiten beschränkt, sondern sich auch eifrig an der Kleinarbeit beteiligt. Als Beispiel sei nur der ausführliche Bericht über die Ausbildung der Ingenieure in den verschiedenen Ländern erwähnt, den er der internationalen mathematischen Unterrichtskommission auf ihrer Tagung in Paris 1914 erstattet hat.

In den letzten Jahren hat sich STÄCKEL auch der Primzahlforschung zugewandt. Zwar hat er sich nicht an dem Ausbau der Theorien beteiligt, die heute im Vordergrund des Interesses stehen; er ist eigene Wege gegangen. Fragen der additiven Zahlentheorie aus dem Ideenkreise des GOLDBACHschen Satzes, daß jede gerade Zahl als Summe von zwei Primzahlen darstellbar ist, waren es, die er im Auge hatte. Dabei lag es gar nicht in seiner Absicht, irgendwelche Gesetze in aller Strenge nachzuweisen; das dürfte bei dem heutigen Stande der Wissenschaft, wo noch nicht einmal der Nachweis des GOLDBACHschen Satzes erbracht ist, kaum möglich sein. Vielmehr suchte er durch heuristische Methoden und kühne Spekulationen für gewisse Verteilungsgesetze Näherungsformeln aufzustellen, die er dann durch äußerst langwierige numerische Rechnungen kontrollierte. Und er hatte die Genugtuung, daß die Kontrollen seine Formeln in hohem Maße stützten, und daß die verwickelten Schwankungen der Wirklichkeit mit genügender Deutlichkeit in seinen Näherungsgesetzen zum Ausdruck kamen.

Zum Schluß unsrer Ausführungen kann nicht unterlassen werden, darauf hinzuweisen, daß STÄCKEL es auch in hervorragendem

Maße verstanden hat, für Fragen der Mathematik und des mathematischen Unterrichts weitere Kreise zu interessieren und bei ihnen Verständnis wachzurufen. Wiederholt hat er in allgemein bildenden Zeitschriften (Die Geisteswissenschaften, Internationale Monatsschrift u. a.) Aufsätze über Fragen, die die Mathematik berühren, veröffentlicht. Besonders aber lag ihm die Pflege guter Beziehungen der Mathematik zu den angewandten Wissenschaften am Herzen. Mit den Vertretern der Technik war er stets in enger Fühlung. In der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure sind zahlreiche Aufsätze seiner Feder entsprungen, in denen er die verschiedensten Fragen behandelt hat.

Wie hoch STÄCKEL die Wechselwirkung zwischen Theorie und Praxis einschätzte, und wie sehr er es verstand, auch Nichtmathematikern diese Wechselwirkung klar zu machen und ihnen dabei Verständnis für ganz abstrakt scheinende mathematische Fragen beizubringen, das zeigt sich am besten in seiner glänzenden und gehaltvollen Karlsruher Antrittsrede über mathematische Methoden zur Untersuchung mechanischer Probleme, gedruckt im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 1908 und in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1908. Sie ist ein vollendetes Kunstwerk.