Krazer

Sonderabdruck. Prym

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

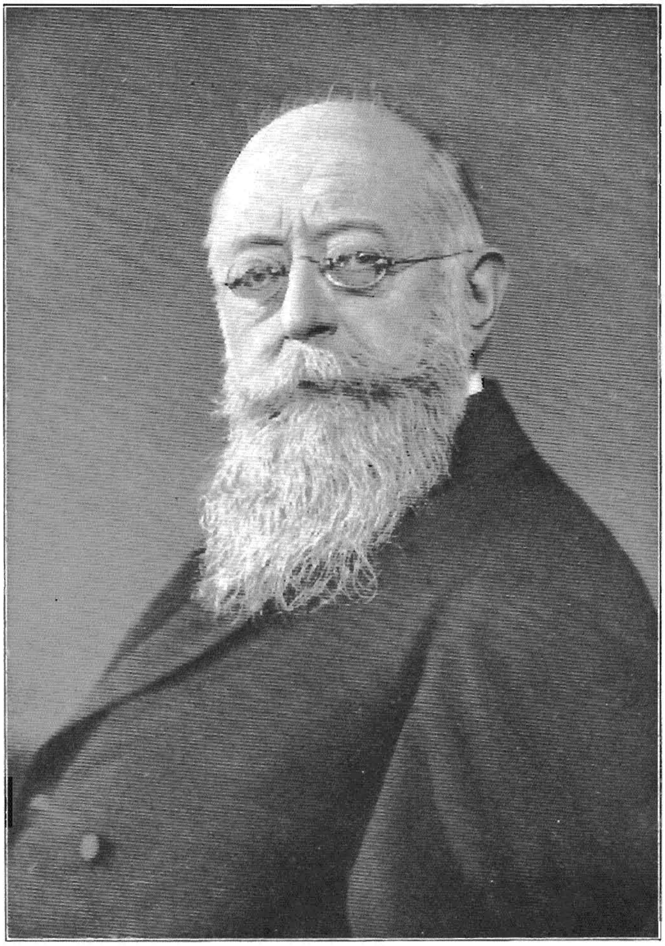
IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.

25. BAND · 1.—3. HEFT · JANUAR—MÄRZ
MIT EINEM TITELBILD UND 12 FIGUREN IM TEXT

AUSGEGEBEN AM 23. MAI 1916

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1916



F. Prym

Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XXV. 1916. Heft 1/3.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Friedrich Prym.

Von ADOLF KRAZER in Karlsruhe.

(Mit einem Bildnis von Friedrich Prym als Titelbild.)

Am 15. Dezember des letzten Jahres ist in Bonn, bei vorübergehendem Aufenthalte, der langjährige ordentliche Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, Geheimer Rat Dr. Friedrich Prym, nach vollendetem 74. Lebensjahre gestorben.

Mit ihm hat unsere Wissenschaft einen anerkannten Forscher von starker Eigenart, großem Können und zäher Arbeitskraft verloren; ich, als sein ältester Schüler, will in dankbarer Erinnerung an den lieben und hochverehrten Lehrer auf den folgenden Seiten versuchen, den Mitgliedern unserer Vereinigung sein Lebenswerk zu schildern.

Friedrich Prym wurde am 28. September 1841 in Düren als Sohn des Tuchfabrikanten Richard Prym und seiner Gattin Ernestine, geb. Schoeller, geboren. Nachdem er das dortige Gymnasium absolviert hatte, studierte er 1859—1863 an den Universitäten Berlin, Heidelberg und Göttingen.*) Hier hörte er im W.-S. 1861/62 den zweiten Teil der Vorlesung Riemanns „über Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche"**) und fertigte gleichzeitig von dem im S.-S. 1861 gelesenen ersten Teile

*) In der seiner Dissertation angefügten Vita gibt Prym an, daß er in Berlin bei Arndt, Christoffel, Dove, Hoppe, Kummer, Mitscherlich und Trendelenburg, in Heidelberg bei Hesse, in Göttingen bei Lotze, Riemann, Stern, Waitz und Weber gehört und ferner in Heidelberg bei Bunsen und in Berlin bei Sonnenschein im chemischen Laboratorium gearbeitet habe.

**) Nachdem von dieser Vorlesung zwei kleinere Untersuchungen u. d. T. „Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe" und „Zur Theorie der Abelschen Functionen (für den Fall $p = 3$)" schon in die Ges. math. Werke Riemanns (1. Aufl. 1876, S. 452 u. 456; 2. Aufl. 1892, S. 483 u. 487) aufgenommen worden waren, hat H. Stahl den aus dem S.-S. 1861 stammenden, auf die elliptischen Funktionen bezüglichen Teil u. d. T. „Elliptische Functionen. Vorlesungen von B. Riemann" 1899 veröffentlicht, und 1902 ist in den von Noether und Wirtinger herausgegebenen „Nachträgen" zu den Ges. math. Werken Riemanns die ganze Vorlesung des W.-S. 1861/62, die die hyperelliptischen und die Abelschen Funktionen, insbesondere des Falles $p = 3$ behandelte, auszugsweise veröffentlicht worden; vgl. dazu auch Noether, „Über Riemanns Vorlesungen von 1861—62 über Abelsche Funktionen" (Jahresb. d. D. Math.-Ver. Bd. 8. S. 177).

auf Grund einer Nachschrift Hattendorfs eine Ausarbeitung an, die er später autographisch vervielfältigen ließ. Diese Vorlesung bildete die Grundlage für Pryms mathematische Ausbildung und für seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten. Schon 1862 begann er seine Dissertation „Theoria nova functionum ultraellipticarum. Pars prior“, in der zum ersten Male die von Riemann für die Theorie der Abelschen Funktionen geschaffenen Anschauungen und Methoden zur Behandlung eines speziellen Falles verwertet wurden. Auf Grund dieser Abhandlung promovierte Prym am 21. Februar 1863 an der philosophischen Fakultät der Universität Berlin. Dann trat er, nachdem er inzwischen zu Hause die in seiner Dissertation begonnenen Untersuchungen fortgesetzt und im September 1863 abgeschlossen hatte, als Volontär in das Bankgeschäft der ihm verwandten Familie Schoeller in Wien ein. Von dort stammt die vorher genannte autographierte Vervielfältigung der Riemannschen Vorlesung, und dort wurde auch die aus seiner Dissertation hervorgegangene Abhandlung „Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen“ am 14. Januar 1864 in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Akademie vorgelegt und im 24. Bande ihrer Denkschriften veröffentlicht.

Als Prym im § 29 dieser Abhandlung ihr Hauptresultat niederlegte, nach welchem der Quotient zweier Thetafunktionen mit verschiedenen Charakteristiken, deren Argumente Summen von je 3 ultraelliptischen Integralen 1. Gattung sind, sich algebraisch als Quotient zweier Determinanten darstellen lasse, da erkannte er bereits, daß er in dieser Formel den Schlüssel für den allgemeinen hyperelliptischen Fall gefunden habe, und entwickelte noch im Schlußparagraphen die Grundzüge einer Theorie der hyperelliptischen Funktionen beliebigen Geschlechts, wie er sie demnächst zu veröffentlichen gedenke.

Für die Gestaltung dieser Untersuchungen Pryms wurde ein mehrwöchentliches Zusammensein mit Riemann entscheidend, der sich im Frühjahr 1865 seiner Gesundheit wegen in Pisa aufhielt und dort Prym die Sätze über das Verschwinden der hyperelliptischen Thetafunktionen mitteilte, wie er sie für einen besonderen Fall der Zerschneidung der Riemannschen Fläche aufgestellt hatte. Prym erbrachte nach Riemanns Anweisung unter Heranziehung der höheren Derivierten der Thetafunktionen einen allgemeinen Beweis dieser Sätze und konnte nun mit ihrer Hilfe seinen Untersuchungen den gewünschten Abschluß geben, der wieder in der algebraischen Darstellung des Quotienten zweier Thetafunktionen, deren Argumente nunmehr Summen von je $p+1$ Integralen sind, als Quotienten zweier Determinanten seinen Ausdruck fand.

Inzwischen war Prym als Professor an das eidgenössische Polytechnikum nach Zürich berufen worden (1865), und dort veröffentlichte er die eben geschilderten Untersuchungen über die hyperelliptischen Funktionen in der vom Juni 1866 datierten Abhandlung „Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche“ im 22. Bande der Denkschriften der Schweiz. Naturf. Gesellschaft.

Diese Abhandlung Pryms wurde für die Mathematik von weittragender Bedeutung; denn ihr war es, neben den Abhandlungen Rochs*), zu verdanken, wenn die Riemannsche Abhandlung über die „Theorie der Abelschen Functionen“, die, wie Brill und Noether in ihrem Bericht über „die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit“ (Jahresb. d. D. Math.-Ver. Bd. 3, 1894, S. 266) sagen, in ihrer knappen Darstellungsform, ihrer Gedankenfülle und ihrer Tiefe für die mathematische Welt ein Buch mit sieben Siegeln geblieben war, nunmehr zum Gemeingut der Mathematiker und damit zugleich zu einem vielumworbenen Objekt weiterer Forschung wurde, und diese Züricher Abhandlung Pryms hatte auch Christoffel im Auge, wenn er in seiner „Vollständigen Theorie der Riemannschen ϑ-Function“ (Math. Ann. Bd. 54, Ges. math. Abhandlungen Bd. 2, 1910, S. 316) die unbeschreiblichen Verdienste in Erinnerung brachte, welche Prym sich um das Verständnis Riemanns erworben habe. Für Pryms Stellung als Schüler Riemanns aber wurde das Jahr 1866 noch dadurch von besonderer Bedeutung, daß in ihm zuerst Riemann selbst am 20. Juli und dann der vorher genannte Roch am 21. November starben und Prym nun zunächst allein die Aufgabe zufiel, die Riemannsche Lehre weiterzuführen.

Welcher Art die Untersuchungen waren, die Prym in den nun folgenden Jahren in dieser Richtung anstellte, sehen wir aus den Abhandlungen, die er, 1869 als ordentlicher Professor an die Universität Würzburg berufen, in diesem Jahre von dort aus veröffentlichte: „Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$“, vom Sommer 1869 (J. f. Math. Bd. 70, S. 354); „Beweis zweier Sätze der Functionentheorie“, vom September 1869 (J. f. Math. Bd. 71, S. 223); „Über ein Randintegral“, vom November 1869 (J. f. Math. Bd. 71, S. 305).

Prym war hier von dem Resultate Riemanns ausgegangen, daß zu jeder graphisch willkürlich gewählten mehrblättrigen Fläche immer eine Gruppe sogenannter Abelscher, in der zerschnittenen Fläche einwertiger Integrale existiert, und ferner, daß diese Abelschen Integrale solche Funktionen $u+vi$ von x und y sind, daß sie durch die Bedingung,

*) Hab.-Schrift Halle 1863; J. f. Math. Bd. 61—68, Zeitschr. f. Math. Bd. 4—11.

den gleichzeitigen partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ zu genügen, und durch passend gewählte voneinander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können, und hatte die Möglichkeit eines Fortschrittes in der Funktionentheorie in dem Versuche erkannt, das obige System von Differentialgleichungen unter Zugrundelegung neuer charakteristischer Grenzbedingungen zu integrieren. Solche Bedingungen aber erhielt er, indem er das Verhalten der Abelschen Integrale, beim Überschreiten der Querschnitte um Konstanten zuzunehmen, dahin verallgemeinerte, daß sie bei diesem Überschreiten in ganze lineare Ausdrücke von sich selbst übergehen sollen.

Wie weit Prym schon damals bei seinen Untersuchungen vorgedrungen war, zeigt der Umstand, daß die erste der drei genannten Abhandlungen bereits jenen Fundamentalsatz und die dritte jene Fundamentalformel enthielt, welche in der von Prym und Rost 1911 veröffentlichten „Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung" den Abschluß des ersten Teiles (6. und 7. Abschnitt) bilden. Prym hatte damals auch bereits mit der Ausarbeitung begonnen und die vom Mai 1871 datierte Abhandlung: „Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$" (J. f. Math. Bd. 73, S. 340) deckt sich in ihrem Probleme mit dem 1. Abschnitte des 1. Teiles des Prym-Rostschen Werkes. Aber die genauere Vergleichung der beiden Stücke läßt auch den bedeutenden Unterschied zwischen dem damaligen Standpunkte Pryms und dem späteren, des Prym-Rostschen Werkes erkennen, indem Prym der Randfunktion nur eine endliche Anzahl von endlichen Sprungunstetigkeiten gestattet, während ihr später lediglich die Bedingung der Endlichkeit und Integrierbarkeit auferlegt ist. Indem Prym sich aber bald von der Unzulässigkeit der von ihm eingeführten Beschränkung überzeugte, und indem er zugleich die Unzulänglichkeit des ihm bisher als Grundlage seiner Existenzbeweise dienenden Dirichletschen Prinzips erkannte, konnte er wohl zu der Ansicht kommen, der auch im Vorworte des Prym-Rostschen Werkes Ausdruck gegeben ist, daß sich dem Aufbau der Theorie sowohl hinsichtlich der strengen Beweisführung wie hinsichtlich der klaren Darstellung so mannigfache Schwierigkeiten entgegengestellt hätten, daß er für sich allein nicht imstande gewesen wäre, sie zu überwinden. So hat er das in seiner ersten Abhandlung gegebene Versprechen, daß seine Untersuchungen „in ihrer Gesamtheit in kurzer Zeit veröffentlicht werden sollen", leider nicht eingelöst, und doch hätte er darin ein Mittel sehen können, der von ihm beklagten Abkehr der Mathematiker von den Methoden Riemanns entgegenzuwirken.

Es war das Verdienst F. Kleins, durch sein Buch „Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" 1882 das Interesse der Mathematiker Riemann wieder zugewendet zu haben, und aus dessen Vorwort erfahren wir, daß er seine in sich abgeschlossene Gesamtauffassung der Riemannschen Theorie ganz wesentlich einer Unterhaltung mit Prym (1874) verdanke.

Im Jahre 1872 erhielt Prym einen glänzenden Ruf an die neuerrichtete Universität Straßburg. Daß er diesem Rufe, der ihm ein größeres und fruchtbareres Feld für seine Lehrtätigkeit eröffnet hätte, nicht Folge leistete und auch eine nach mehreren Jahren ihm nochmals angebotene Gelegenheit, nach Straßburg überzusiedeln, ablehnte, haben seine Freunde stets bedauert.

Vom Juni 1876 stammt eine Abhandlung: „Zur Theorie der Gammafunction" (J. f. Math. Bd. 82, S. 165), in der Prym zeigt, daß jede der beiden durch Zerlegung der Funktion $\Gamma(z)$ in eine Reihe von Partialbrüchen einerseits und eine Reihe von ganzen Potenzen von z andererseits entstehenden Funktionen $P(z)$ und $Q(z)$ durch ebenso einfache Bedingungen wie $\Gamma(z)$ selbst vollständig definiert werden kann, und vom März 1877 datiert Prym seinen „Beweis eines Riemannschen Satzes" (J. f. Math. Bd. 83, S. 251), in welchem er zeigt, daß jede in der n-blättrigen, die Verzweigung der durch eine irreduzible Gleichung $F(s, z)=0$ definierten algebraischen Funktion s von z repräsentierenden Fläche T einwertige Funktion σ, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten der Fläche von ganzzahliger, endlicher Ordnung unendlich wird, eine rationale Funktion von z und s ist.

Im Herbste 1878 wurde Prym durch einen Zufall an eine Formel erinnert, welche ihm Riemann 1865 bei ihrem Zusammensein in Pisa mitgeteilt hatte, und er nahm, dadurch veranlaßt, damals abgebrochene Untersuchungen wieder auf, welche ihn nun durch eine Reihe von Jahren beschäftigen sollten und an denen mich Prym vom Januar 1881 an teilnehmen ließ.

Für die eben genannte Formel, die Prym die Riemannsche Thetaformel nannte*), hatte er schon 1865 auf Riemanns Anregung einen Beweis verfaßt, der sich auf jenes Prinzip der Zerlegung einer periodischen Funktion stützte, das Riemann in seiner Vorlesung vom W.-S. 1861/62 auseinandergesetzt hatte.**) Dieser Beweis bildet, ohne wesentliche Abänderung, den Inhalt der Abhandlung: „Die Riemannsche Thetaformel", der ersten jener fünf Arbeiten, die Prym 1882 zusammen u. d. T.:

*) Riemanns Ges. math. Werke. Nachträge, S. 98.
**) Ebd. S. 1.

„Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie" herausgab.

In der zweiten Abhandlung: „Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel" hat Prym zu dem Zwecke, die Natur der Riemannschen Thetaformel klarzustellen, eine Formel von allgemeinem Charakter aufgestellt, welcher an Stelle des jener zugrunde liegenden speziellen involutorisch-orthogonalen Systems das allgemeinste derartige System untergelegt ist.

In der dritten Abhandlung: „Beweis einiger Charakteristikensätze" werden die von Riemann in seiner Vorlesung vom W.-S. 1861/62 mitgeteilten Sätze über die Anzahl der geraden und der ungeraden Charakteristiken und über die Anzahlen der verschiedenen Zerlegungen einer Charakteristik in zwei bewiesen. Den letzteren Satz hatte Riemann in seiner Vorlesung ohne Beweis angegeben.*)

Die vierte Abhandlung: „Verallgemeinerung der Riemannschen Charakteristikentheorie" knüpft an die Züricher Arbeit über die hyperelliptischen Funktionen an. In dieser war Prym, indem er das System der p Riemannschen Normalintegrale von einem Verzweigungspunkte zu den $2p+1$ übrigen erstreckte, erstmals zu einem Fundamentalsystem von Periodencharakteristiken $(a_1), (a_2), \ldots, (a_{2p+1})$ gelangt und hatte nachgewiesen, daß, wenn man mit $[\varkappa]$ die Summe der ungeraden unter ihnen bezeichnet, die hyperelliptischen Thetafunktionen $\vartheta[\varkappa+\sum^{p-2m-1} a]((v))$ und $\vartheta[\varkappa+\sum^{p-2m-2} a]((v))$ samt allen Derivierten der 1ten bis $m$ten, nicht aber der $(m+1)$ten Ordnung für $(v)=(0)$ verschwinden, woraus sich dann sofort ergab, daß die Charakteristiken $[\varkappa+\sum^{p} a]$, $[\varkappa+\sum^{p-4m-3} a]$, $[\varkappa+\sum^{p-4m-4} a]$ gerade, die Charakteristiken $[\varkappa+\sum^{p-4m-1} a]$, $[\varkappa+\sum^{p-4m-2} a]$ ungerade sind. Inzwischen hatte Stahl**) gezeigt, daß die $2p+1$ Charakteristiken (a) eines Fundamentalsystems paarweise azygetisch sind und daß sie durch diese Eigenschaft definiert werden können. Prym verallgemeinert nun diese Fundamentalsysteme von $2p+1$ Charakteristiken zu Systemen von $2p+2$, indem er zu ihnen eine beliebige Charakteristik addiert und diese selbst als $(2p+2)$te hinzunimmt; er erhält so Systeme von $2p+2$ Charakteristiken, welche ganz ähnliche Eigenschaften wie die früheren von $2p+1$ aufweisen; heute werden sie als Fundamentalsysteme von Thetacharakteristiken bezeichnet.

*) Riemanns Ges. math. Werke. Nachträge, S. 61.

**) H. Stahl, Beweis eines Satzes von Riemann über ϑ-Charakteristiken. J. f. Math. Bd. 88, 1880, S. 273. Über die Frage, inwieweit Riemann bereits die azygetische Eigenschaft der Periodencharakteristiken eines Fundamentalsystems gekannt hat, vgl. die Bemerkung Noethers S. 60 der „Nachträge" in Anmerkung (10). Der 7. Abschnitt (ebenda S. 50) zeigt, daß das, was Prym im Vorworte seiner vereinigten fünf Abhandlungen S. VII über Riemanns Behandlung der Fundamentalsysteme sagt und irrtümlich als bereits in seiner Züricher Arbeit mitgeteilt bezeichnet, aus der Riemannschen Vorlesung vom W.-S. 1861/62 stammt, in der Riemann in der Tat die Haupteigenschaft der Fundamentalsysteme ohne Benutzung der hyperelliptischen Integrale durch den Schluß von p auf $p+1$ abgeleitet und daraus die Folgerung gezogen hat, daß diese Systeme auch für die allgemeinen Abelschen Funktionen verwendbar sind.

Wenn man in der Riemannschen Thetaformel an Stelle der auf ihrer linken Seite vorkommenden Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach die sämtlichen 2^{2p} Charakteristiken treten läßt, so entsteht ein System von 2^{2p} Gleichungen. Der Untersuchung dieses Gleichungensystems hat Prym seine fünfte Abhandlung: „Über ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales System linearer Gleichungen" gewidmet und darin sowohl das Weierstraßsche Additionstheorem der hyperelliptischen Thetafunktionen*) wie das 1880 ziemlich gleichzeitig von Stahl, Noether und Frobenius für $p \geqq 3$ aufgestellte Additionstheorem der allgemeinen Thetafunktionen**) aus der Riemannschen Thetaformel abgeleitet. Auf Pryms Veranlassung hatte ich***) inzwischen eine Theorie der 16 Thetafunktionen des Falles $p=2$ bearbeitet und dabei alle Relationen, welche die algebraischen Beziehungen zwischen diesen Funktionen bestimmen, aus einer mit Hilfe der Riemannschen Thetaformel gewonnenen linearen Formel zwischen 6 Thetaprodukten abgeleitet. Als Analogon dieser Formel ergab sich für den Fall $p>2$ eine Formel von $6\cdot 2^{p-2}$ Gliedern, deren Ableitung aus der Riemannschen Thetaformel im Frühjahr 1882 den Abschluß der fünften Abhandlung Pryms bildete.

Unterdessen hatte Prym eine „kurze Ableitung der Riemannschen Thetaformel", die er 1880 gefunden hatte und die sich auf die Bestimmung der Thetafunktion durch ihre Periodizitätseigenschaften gründet, im 93. Bande des J. f. Math. veröffentlicht.

Von zwei verschiedenen Seiten bekam Prym im Juli 1882 gleichzeitig Anlaß zur Fortführung seiner Untersuchungen über Thetafunktionen. Einmal fand er, daß man die Riemannsche Thetaformel auch

*) Königsberger, Über die Transformation der Abelschen Functionen erster Ordnung. J. f. Math. Bd. 64, 1865, S. 17.

**) H. Stahl, Das Additionstheorem der ϑ-Functionen mit p Argumenten. J. f. Math. Bd. 88, 1880, S. 117; Noether, Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten. Math. Ann. Bd. 16, 1880, S. 270; Frobenius, Über das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. J. f. Math. Bd. 89, 1880, S. 185.

***) Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel. 1882.

unter Verzicht auf alle funktionentheoretischen Hilfsmittel durch direkte Umformung der ihre linke Seite darstellenden $4p$-fach unendlichen Reihe erhalten kann, wenn man nur das von Jacobi*) zur Gewinnung ähnlicher Formeln angewandte Verfahren der Einführung neuer Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen Substitution mit der Einschiebung eines Faktors verbindet, der (von ähnlicher Wirkung wie der Dirichletsche diskontinuierliche Faktor bei den bestimmten Integralen) gestattet, die zunächst eingetretene Beschränkung der neuen Summation aufzuheben.**)

Den auf diesem direkten Wege gewonnenen Beweis der Riemannschen Thetaformel hatte Prym schon am 10. Juli 1882 in autographischer Vervielfältigung den Fachgenossen mitgeteilt und veröffentlichte ihn 1883 im 3. Bande der Acta mathematica: „Ein neuer Beweis für die Riemannsche Thetaformel." Er wandte aber das nämliche Verfahren in der am gleichen Orte erscheinenden Abhandlung: „Ableitung einer allgemeinen Thetaformel" auch auf die frühere „Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel" an und fand so nicht nur für diese gleichfalls einen direkten Beweis, sondern erkannte zugleich auch, daß die bisherige Beschränkung auf involutorisch-orthogonale Systeme unnötig gewesen war, daß vielmehr der Formel jedes beliebige orthogonale System zugrunde gelegt werden kann.

Anderer Art war die Anregung, welche die Untersuchungen über Thetafunktionen durch den Umstand erfuhren, daß ich, der ich damals in Leipzig bei F. Klein weilte, von diesem aufgefordert wurde, die zwischen Thetafunktionen mit Drittelcharakteristiken ($r = 3$) bestehenden Relationen zu erforschen, und gleichfalls im Juli 1882, um eine sichere Grundlage für diese Untersuchungen zu gewinnen, aus der Prymschen allgemeinen Thetaformel spezielle Formeln ableitete***); dadurch gewann diese Formel, die bisher ausschließlich zur Aufhellung der Natur der Riemannschen Thetaformel dienen sollte, eine neue Bedeutung. Im Februar 1883 haben wir dann zusammen die soeben genannten Formeln

*) Jacobi, Theorie der elliptischen Funktionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. Ges. Werke Bd. 1, S. 503.

**) Erst als ich später (Math. Ann. Bd. 52, 1899, S. 369) diese Methode der Umformung auf ganz beliebige unendliche Reihen anwandte, wurde der volle Einblick in die inneren Vorgänge eines solchen Umwandlungsprozesses erschlossen und erkannt, daß das Resultat der Umformung einmal durch gruppenweises Zusammenfassen von Gliedern der gegebenen Reihe zu Teilreihen, weiter aber durch Einschieben von Gruppen neuer Glieder, die zusammen den Wert Null haben, zu Stande kommt; dieses Einschieben neuer Glieder wird durch den Prymschen Faktor erreicht.

***) A. Krazer, Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, Math. Ann. Bd. 22, 1883, S. 416.

des Falles $r = 3$ auf beliebiges r ausgedehnt und damit eine Formel gewonnen, welche uns für die Erforschung der zwischen Thetafunktionen mit r^{tel} Charakteristiken bestehenden Beziehungen von der gleichen Bedeutung schien, wie es die Riemannsche Thetaformel im Falle $r = 2$ ist, und die wir daher unter dem Titel: „Über die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel" im 3. Bande der Acta mathematica veröffentlichten.

Während der nun folgenden 6 Jahre haben Prym und ich, die wir fast täglich zu gemeinsamer Arbeit zusammenkamen, die Untersuchungen über Thetafunktionen fortgesetzt.

Die erste Aufgabe, die wir uns stellten, war die, zu untersuchen, in welcher Weise sich das Prymsche Verfahren der direkten Umformung der ein Produkt von n Thetafunktionen darstellenden np-fach unendlichen Reihe auf den Fall ausdehnen lasse, daß die n Thetafunktionen verschiedene Modulen besitzen. Es gelang uns schon 1884 die allgemeinste derartige Formel aufzustellen, die wir „Fundamentalformel der Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken"*) nannten.

Daneben waren wir bestrebt, aus dieser Fundamentalformel, in der alle bisher bekannten derartigen Formeln als spezielle Fälle enthalten waren, außer diesen noch weitere spezielle Formeln abzuleiten, welche uns für die Untersuchung der zwischen Thetafunktionen bestehenden algebraischen Beziehungen brauchbar schienen.

Als wir aber Thetafunktionen mit verschiedenen Modulen in den Kreis unserer Betrachtungen zogen, hatten wir bereits das Gebiet der Transformation der Perioden beschritten, und es lag nun nahe, daß wir auch für das allgemeine Transformationsproblem nach einer alle speziellen Fälle umfassenden Formel suchten und gleichzeitig bestrebt waren, diese Formel durch direkte Umformung der Thetareihen zu erhalten. Diese Bemühugen, deren Anfänge schon in das Jahr 1882 zurückreichen, machten aber den entscheidenden Fortschritt erst, als Prym im Frühjahr 1885 erkannte, daß man gewisse einfache Thetaformeln als lineare Transformationsformeln, deren Transformationszahlen gebrochene Zahlen sind, auffassen könne.

Diese Erkenntnis zusammen mit der, daß bei jeder linearen Transformation, auch wenn die Transformationszahlen gebrochene Zahlen sind, sich die ursprüngliche Thetafunktion immer linear durch die transformierten ausdrücken lasse, veranlaßte uns, nicht mehr, wie es bisher zu

*) Bei dieser Gelegenheit ist es vielleicht interessant zu bemerken, daß die von Weierstraß aufgestellte, aber erst im Jahre 1903 im 3. Bande seiner Mathematischen Werke S. 123 u. d. T. „Verallgemeinerung einer Jacobischen Thetaformel" veröffentlichte Formel mit dieser Formel übereinstimmt; speziell ist die Weierstraßsche Formel (II) genau unsere Fundamentalformel.

geschehen pflegte, die ganzzahlige, sondern die lineare Transformation in den Mittelpunkt der Theorie zu stellen. Wir definierten drei von uns als „elementare“ benannte lineare Transformationen, leiteten die ihnen entsprechenden Formeln durch direkte Umformung der Thetareihen ab und zeigten, daß jede lineare Transformation sich aus solchen elementaren in so einfacher Weise zusammensetzen lasse, daß es möglich war, auch die der allgemeinen linearen Transformation entsprechende Thetaformel durch Zusammensetzung der den elementaren entsprechenden zu erhalten. Die nichtlineare Transformation konnte endlich aus der linearen und zwei ganz speziellen nichtlinearen zusammengesetzt und auf diese Weise auch die ihr zugehörige Thetaformel erhalten werden, deren Gewinnung den Schlußstein für die von uns aufgestellte Transformationstheorie bildete.

Unsere Untersuchungen waren im wesentlichen abgeschlossen, und wir hatten schon mit der Ausarbeitung begonnen, als wir durch meine Berufung nach Straßburg getrennt wurden. Bald erkannten wir, daß die Veröffentlichung unserer Untersuchungen in der von uns beabsichtigten ausführlichen Gestalt unter den so geänderten Verhältnissen in absehbarer Zeit nicht durchführbar sei, und kamen daher 1891 dahin überein, daß ich aus unseren Manuskripten einen Auszug veröffentlichen solle, der die von uns gewonnenen Resultate vollständig enthalte, zugleich aber auch einen genauen Einblick in die angewendeten Methoden gewähre. Dieser Auszug erschien 1892 unter dem Titel: „Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen.“

Die wiederholte Beschäftigung mit den orthogonalen, involutorischen und orthogonal-involutorischen Substitutionen gab Prym Veranlassung, die Darstellung der Koeffizienten dieser Substitutionen durch voneinander unabhängige Parameter, die bisher nur für die orthogonalen Substitutionen behandelt worden war, auch für die involutorischen und die orthogonal-involutorischen durchzuführen. Die vollständige Lösung dieser Aufgabe hat er im November 1891 der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt und im 38. Bande ihrer Abhandlungen veröffentlicht.

Inzwischen hatte Prym an Rost einen neuen Mitarbeiter gefunden und ging im November 1892 mit diesem an die Ergänzung und Ausarbeitung jener Untersuchungen, welche er vor mehr als zwanzig Jahren über Funktionen, die beim Überschreiten der Querschnitte in lineare Ausdrücke von sich selbst übergehen, begonnen und deren damalige Hauptergebnisse er im Journal für Mathematik veröffentlicht hatte.

Es handelte sich bei der Theorie dieser Funktionen, für welche jetzt der Name „Prymsche Funktionen 1. Ordnung“ gewählt wurde, zunächst um ihren Existenzbeweis. Dieser Beweis wurde in dem ersten Teile, den „Grundlagen der Theorie“, erbracht. Prym und Rost beginnen mit der von Prym im 71. Bande des J. f. Math. unter wesentlichen Beschränkungen durchgeführten Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine schlichte Kreisfläche, führen sie dann für eine ν-blättrige, einen $(\nu - 1)$-fachen Windungspunkt umgebende Kreisfläche und unter Anwendung der Methode der sukzessiven Influenzen für eine von zwei konzentrischen Kreisen begrenzte Ringfläche durch und lassen hierauf die Lösung der gleichen Aufgabe für eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche T' folgen unter der Bedingung, daß u in vorgegebenen Punkten in vorgegebener Weise unstetig werde und

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\text{: } u^+ = A_\nu u^- + \mathfrak{A}_\nu,\\ &\text{längs } b_\nu\text{: } u^+ = B_\nu u^- + \mathfrak{B}_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p)\\ &\text{längs } c_\nu\text{: } u^+ = u^-, \end{aligned}$$

sei, wobei die A, B sämtlich den Modul 1 haben*), die Konstanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aber mit ihnen durch die für das Zusammenbestehen der gestellten Bedingungen notwendigen Relationen $(1 - B_\nu)\,\mathfrak{A}_\nu = (1 - A_\nu)\,\mathfrak{B}_\nu\ (\nu = 1, 2, \ldots p)$ verknüpft sind. Dieser Beweis bildet den Schwerpunkt des ersten Teiles. Nachdem er erbracht ist, kann die Aufstellung und der Beweis des von Prym schon früher (J. f. Math. Bd. 70, S. 359) aufgestellten Fundamentalsatzes geschehen, in welchem eine Funktion W der komplexen Veränderlichen z gefordert wird, die in vorgegebener Weise unstetig werde und für welche

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\text{: } W^+ = A_\nu W^- + \mathfrak{A}_\nu,\\ &\text{längs } b_\nu\text{: } W^+ = B_\nu W^- + \mathfrak{B}_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p)\\ &\text{längs } c_\nu\text{: } W^+ = W^- + \mathfrak{C}_\nu, \end{aligned}$$

endlich für die nach den Unstetigkeitspunkten führenden Schnitte l_σ:

$$\text{längs } l_\sigma\text{: } W^+ = W^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

ist; dabei bestehen jetzt zwischen den Konstanten, für welche wie früher $\bmod A_\nu = \bmod B_\nu = 1$ ist, die Relationen:

$$(1 - B_\nu)\,\mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu)\,\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, \qquad \sum_\nu \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum_\sigma \mathfrak{L}_\sigma = 0.$$

Der Beweis der von Prym schon früher (J. f. Math. Bd. 71, S. 314) aufgestellten Fundamentalformel bildet den Schluß des ersten Teiles, dessen Ausarbeitung Prym und Rost im Jahre 1900 beendet hatten.

Die Aufgabe des zweiten Teiles „Das System der Funktionen“ besteht darin, aus den im Fundamentalsatze des ersten Teiles charakterisierten Funktionen W gewisse einfachste auszuwählen, aus denen sich

*) Über Funktionen, bei denen den Größen A, B diese Beschränkung nicht auferlegt ist, siehe die Bemerkung Pryms J. f. Math. Bd. 70, S. 361.

alle anderen linear zusammensetzen lassen, und sodann mit Hilfe der am Schlusse des ersten Teiles gewonnenen Fundamentalformel die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen zu ermitteln.

Dabei ergaben sich wesentliche Unterschiede, je nach den Werten der nur an die Bedingungen mod. $A_\nu =$ mod. $B_\nu = 1$ geknüpften Größen A_ν, B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots p)$. Das Paar A_ν, B_ν wird ein eigentliches oder uneigentliches Faktorenpaar genannt, je nachdem die beiden Größen A_ν, B_ν nicht beide oder beide den Wert 1 haben; nennt man dann weiter das System der p Faktorenpaare A_ν, B_ν eine Charakteristik, so heißt eine solche eine gewöhnliche oder gemischte, je nachdem die p Paare sämtlich oder nur zum Teil eigentliche sind; jene Charakteristik aber, bei der alle Paare uneigentliche sind, wird die ausgezeichnete Charakteristik genannt. Die der ausgezeichneten Charakteristik entsprechenden Funktionen sind die der Riemannschen Theorie.

Schon bei Bestimmung der allenthalben endlichen Elementarfunktionen zeigt sich, wie Prym übrigens schon J. f. Math. Bd. 70, S. 361 angegeben hat, ein bemerkenswerter Unterschied. Während es in der Riemannschen Theorie, also bei ausgezeichneter Charakteristik, p linear unabhängige allenthalben endliche Funktionen gibt, aus denen sich die allgemeinste derartige Funktion linear zusammensetzen läßt, besteht im Falle einer gewöhnlichen oder einer gemischten Charakteristik schon zwischen p solcher Funktionen eine lineare Relation.

Während es weiter bei der Bildung algebraisch unendlich werdender Elementarfunktionen keinen wesentlichen Unterschied macht, ob die zugehörige Charakteristik eine gewöhnliche, gemischte oder die ausgezeichnete ist, zeigt sich dieser Unterschied um so tiefer gehend bei den logarithmisch unendlich werdenden Funktionen. Bei gewöhnlicher oder gemischter Charakteristik können ohne weiteres Funktionen gebildet werden, welche nur an einer Stelle logarithmisch unendlich werden. In der Riemannschen Theorie ist dies bekanntlich nicht der Fall, die Verfasser haben aber gefunden, daß auch für diese eine nur in einem Punkte logarithmisch unendlich werdende Funktion geschaffen werden kann, wenn man auf die Konstanz der Periodizitätsmodulen an den Schnitten b verzichtet. Die Konstruktion dieser Funktion $P_0\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, für welche

$$\text{längs } a_\nu\colon\ P^+ = P^-,$$

$$\text{längs } b_\nu\colon\ P^+ = P^- + \frac{2}{p}u_\nu^{\varepsilon} - 2u_\nu^{\eta} - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p},$$

$$\text{längs } c_\nu\colon\ P^+ = P^- - \frac{2\pi i}{p},$$

$$\text{längs } l_\eta\colon\ P^+ = P^- + 2\pi i,$$

ist, wo die k_ν die aus der Riemannschen Theorie bekannten Konstanten vertreten, und die also keine Funktion W im Sinne des Fundamentalsatzes ist, gelang den Verfassern im Jahre 1893; sie bildet eines der interessantesten Resultate der ganzen Theorie. Nachdem so für jede Charakteristik die Elementarfunktionen aufgestellt waren, konnten die Verfasser an die Erledigung des eingangs aufgestellten Programms gehen, die allgemeinste zur gegebenen Charakteristik gehörige Funktion W aus den Elementarfunktionen linear zusammenzusetzen und die zwischen den Elementarfunktionen selbst bestehenden Beziehungen zu ermitteln. Ihre Untersuchungen waren im Jahre 1900 im wesentlichen abgeschlossen, 1901 gingen die Verfasser an die Ausarbeitung, die 1906 vollendet war.

Aber noch fehlte dem Werke jener Abschluß, den Prym von vornherein für dasselbe im Auge gehabt hatte, nämlich die Erzeugung der Riemannschen Thetafunktion; diese gelang den Verfassern erst in den Jahren 1909—11, und damit war das Werk abgeschlossen, das u. d. T.: „Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns“ 1911 kurz vor dem 70. Geburtstage Pryms den Mathematikern überreicht wurde.

Wie schon der Titel andeutet, bilden diese Funktionen nur die einfachste Klasse allgemeinerer Funktionen; darüber sagt das Vorwort des eben genannten Werkes: „Die Theorie der Prymschen Funktionen Nter Ordnung, die dadurch charakterisiert sind, daß sie in Gruppen von N Funktionen beim Überschreiten der Schnitte lineare Transformationen erleiden und zugleich durch voneinander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können, läßt sich mit Hilfe des allgemeinen Prymschen Modulsatzes in ganz analoger Weise durchführen, wie es hier für die Funktionen erster Ordnung geschehen ist. Wir hoffen, daß es uns vergönnt ist, auch diese, in ihren Grundzügen längst vorhandene, Theorie in gemeinsamer Arbeit ausführlich zu entwickeln.“ Diese Hoffnung ist leider nicht erfüllt worden. Zwar haben die Verfasser noch im Jahre 1911 die Arbeit aufgenommen, die sie so zu teilen beabsichtigten, daß Prym den Existenzbeweis durchführen wollte, während Rost die Entwicklung der Eigenschaften der Funktionensysteme übernahm; aber obwohl Prym noch in den letzten Monaten seines Lebens an dem von ihm übernommenen Teile fleißig gearbeitet hatte, konnte er ihn doch nicht mehr zum Abschluß bringen; die Vollendung des ganzen Werkes fällt jetzt Rost allein zu; Prym aber hatte das Glück, und das hat er in den letzten Jahren immer wieder als solches bekannt, in ungeschwächter Geistesschärfe und unverminderter Ausdauer an der ihm lieb gewordenen Arbeit bleiben zu können, bis ihm der Tod die Feder aus der Hand nahm.

Im Studienjahre 1897/98 bekleidete Prym das Amt des Rektors der Universität; seine am Stiftungstage der Hochschule gehaltene Festrede behandelte „die Entwicklung der griechichen Mathematik von ihren Anfängen bis zu ihrem Höhepunkte“.

Die Hauptvorlesungen Pryms waren: Differentialrechnung, Theorie der unbestimmten Integrale, der bestimmten Integrale, der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Jahrelang hat er auch Analytische Geometrie regelmäßig wiederkehrend gelesen; daneben finden wir: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, der Fourierschen Reihen und Integrale, der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Zahlentheorie u. a. Prym hat es nie als die Aufgabe solcher Vorlesungen angesehen, den Zuhörern eine möglichst große Menge des Wissenwerten mitzuteilen, sondern er begrenzte den Stoff ziemlich enge und vermied insbesondere Exkurse in die Geschichte oder Literatur des Gegenstandes. Namentlich die regelmäßig wiederkehrenden Vorlesungen waren in Inhalt, Methode und Form das Resultat sorgfältiger, jahrelanger Arbeit. Der Inhalt war bis in jede Einzelheit zuverlässig richtig, so daß auf ihn der Hörer unbesorgt weiterbauen konnte, die Methode war streng und hielt sich frei von allen Scheinbeweisen, die Form war klar, ohne Weitschweifigkeit und von einer Sorgfalt, wie wir sie sonst nur beim gedruckten Worte zu finden gewohnt sind. Diese Eigenschaften machten die Prymschen Vorlesungen von bedeutendem pädagogischen Werte.

Im Februar 1909 hat Prym mit dem Hinweise, daß er am 31. März das 40. Jahr seiner Tätigkeit als ordentlicher Professor in Würzburg vollende, um Enthebung von der Verpflichtung zur Abhaltung von Vorlesungen und von der Leitung des mathematischen Seminars gebeten; auf Wunsch des Ministeriums blieb er noch bis zum 1. Oktober im Amte. Von dem Rechte Vorlesungen zu halten, hat er nach seinem Rücktritt vom Lehramte keinen Gebrauch gemacht.

Zu seinem 70. Geburtstage hat die Stadt Würzburg ihn zu ihrem Ehrenbürger ernannt; zu seinem goldenen Doktorjubiläum verlieh ihm die Universität ihre Ehrenmünze in Gold; beide Ehrungen brachten den Dank für hervorragende Leistungen auf gemeinnützigem Gebiete und für reiche Stiftungen zum Ausdruck.

Prym war korrespondierendes Mitglied der K. B. Akademie der Wissenschaften in München, der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, Ehrenmitglied der physik. mediz. Gesellschaft in Erlangen.

Schriftenverzeichnis.

1. Theoria nova functionum ultraellipticarum. Pars prior. Inaug.-Diss. Berlin 1863. 4. 39 S. 1 Tafel.
2. Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen. Denkschr. der math.-naturw. Classe der K. Akademie der Wiss. zu Wien. Bd. 24, 1864. 4. 104 S. 3 Tafeln. Zweite Ausgabe mit nachträglichen Bemerkungen und neuen Tafeln. Berlin 1885.
3. Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Denkschr. der Schweiz. Naturf. Gesellschaft. Bd. 22, 1866. 4. 47 S.
4. Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. J. f. Math. Bd. 70, 1869, S. 354.
5. Beweis zweier Sätze der Functionentheorie. J. f. Math. Bd. 71, 1870, S. 223.
6. Über ein Randintegral. J. f. Math. Bd. 71, 1870, S. 305.
7. Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. J. f. Math. Bd. 73, 1871, S. 340.
8. Zur Theorie der Gammafunction. J. f. Math. Bd. 82, 1877, S. 165.
9. Beweis eines Riemannschen Satzes. J. f. Math. Bd. 83, 1877, S. 251.
10. Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882. 4. VIII u. 112 S.
11. Kurze Ableitung der Riemannschen Thetaformel. J. f. Math. Bd. 93, 1882, S. 124.
12. Ein neuer Beweis für die Riemannsche Thetaformel. Acta math. Bd. 3, 1883, S. 200.
13. Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta math. Bd. 3, 1883, S. 216.
14. [mit A. Krazer] Über die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel. Acta math. Bd. 3, 1883, S. 242.
15. [mit A. Krazer] Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen. Kurz zusammengefaßt und herausgegeben von A. Krazer. Leipzig 1892. 4. XII und 133 S.
16. Über orthogonale, involutorische und orthogonal-involutorische Substitutionen. Abh. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Bd. 38, 1892. 4. 42 S.
17. [mit G. Rost] Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns. 2 Teile. 1911. 4. 250 u. 300 S.
18. Über die Entwicklung der griechischen Mathematik von ihren Anfängen bis zu ihrem Höhepunkte. Festrede zur Feier des 316jährigen Bestehens der Universität Würzburg gehalten am 11. Mai 1898. 4. 27 S.