Sonderdruck aus Die Naturwissenschaften 1936. 24. Jahrg., Heft 4
(Verlag von Julius Springer, Berlin W 9)
Printed in Germany

Joseph Louis Lagrange.

Zur Zweihundertjahrfeier seines Geburtstages.

Von GEORG HAMEL, Berlin.

GOETHE: „Der Mathematiker ist nur insofern vollkommen, als er ein vollkommener Mensch ist, als er das Schöne des Wahren in sich empfindet; dann erst wird er gründlich, durchsichtig, umsichtig, rein, klar, anmutig, ja elegant wirken. Das alles gehört dazu, um LA GRANGE ähnlich zu werden."

Sprüche in Prosa; Natur IV, Nr. 950.
Hempelsche Ausgabe.

JOSEPH LOUIS LAGRANGE ist am 25. Januar 1736 in Turin geboren. Seiner Abstammung nach war er teils Franzose, teils Italiener, sein Bild mit der starken, aber schmalen Nase, dem feingeschnittenen Gesicht verrät edles Blut und geistige Durcharbeitung. Nach allen Zeugnissen muß er eine vornehme, zurückhaltende Natur gewesen sein, der die Achtung aller errang, die mit ihm zu tun hatten, der preußischen Minister FRIEDRICHS DES GROSSEN, der französischen Königin, der Revolutionäre, die NAPOLEONS und die seiner Fachgenossen. Der ständige Sekretär der Pariser Akademie, DELAMBRE, hebt in der Lebensbeschreibung, die er den gesammelten Werken voranstellt, hervor, daß selten jemand so genau und gewissenhaft zitiert habe wie LAGRANGE — ein Blick in die Werke bestätigt dies —, und das Urteil GOETHES ist noch in vielen Äußerungen, ähnlich der obigen, niedergelegt.

LAGRANGE wurde früh anerkannt; dem Neunzehnjährigen antwortet EULER wie einem Gleichgestellten, dem Dreiundzwanzigjährigen konnte er in den schmeichelhaftesten Ausdrücken seine Ernennung zum Auswärtigen Mitglied der Berliner Akademie mitteilen. 1766 kam LAGRANGE auf Empfehlung EULERS und D'ALEMBERTS als EULERS Nachfolger an die Akademie nach Berlin, wo er bis nach dem Tode FRIEDRICHS DES GROSSEN, also mehr als zwanzig Jahre, blieb. Dann wurde er (Anfang 1787) an die Pariser Akademie berufen, arbeitete an der Schaffung des metrischen Systems wesentlich mit: während die Revolutionäre LAVOISIER, BORDA, LAPLACE, COULOMB, BRISSON aus der Liste strichen, ließen sie LAGRANGE. Man machte ihn zum Professor der École normale und der École polytechnique; er wurde unter NAPOLEON Comte de l'empire und Großoffizier der Ehrenlegion. Seine Gesundheit war gegen Ende seines Lebens schwach, er starb am 10. April 1813 mit derselben würdigen Ruhe, die er stets bewahrt hat.

Die Worte GOETHES zeugen von dem großen Ansehen, das LAGRANGE auch außerhalb der engeren Fachkreise genossen hat. Er war offenbar im Bewußtsein dieser Zeit *der* große Mathematiker. Ist er es für uns auch noch?

Sicher lebt noch sehr viel von ihm. Sein Name wird in Büchern und Vorlesungen oft genannt. Sein früher Ruhm stammt aus seinen Arbeiten über Differentialgleichungen, über Variationsrechnung und über Mechanik, die er in Turin während des ersten Dutzends seiner produktiven

Jahre veröffentlichte. Differentialgleichungen: eine Reihe sog. integrabler Fälle, die Variation der Konstanten in den mannigfaltigsten Anwendungen, die volle Erkenntnis des Wesens der singulären Lösungen, später die Theorie der vollständigen Lösungen partieller Differentialgleichungen, die Transformation der linearen Differentialgleichungen. Variationsrechnung: die Herausarbeitung eines vollendeten Kalküls der Variationen, auch bei Nebenbedingungen. Pflegen wir jetzt auch die LAGRANGEschen Gleichungen der Variationsrechnung mit Recht nach EULER zu nennen, so hat LAGRANGE doch die umfassendere Methode, was EULER selbst anerkannt hat. Mechanik: Umfangreiche Arbeiten über den Schall, überhaupt die Schwingungen elastischer Körper, wo er NEWTON und D'ALEMBERT vollendet und die Differentialgleichung der schwingenden Saite in der heute allgemein angenommenen Weise integriert. Das Prinzip der kleinsten Wirkung findet die LAGRANGE eigentümliche Darstellung.

Die späteren Jahre bringen den Ausbau der drei genannten Gebiete. Besonders zu nennen ist etwa die berühmte Umkehrformel, die er auf die KEPLERsche Gleichung anwendet. Die Theorie der Reihen fruchtbar zu machen, war überhaupt ein großer leitender Gesichtspunkt bei ihm, bis tief in die Algebra, ja die Arithmetik hinein.

Ganz besonders hat LAGRANGE die Himmelsmechanik gefördert, seine Berliner Zeit ist wesentlich mit Arbeiten aus diesem Gebiet erfüllt. Von den vierzehn Bänden seiner Werke beanspruchen sie einen starken Teil, von den rein wissenschaftlichen wohl die Hälfte. Von ihm stammt die Störungsrechnung in ihrer formalen Vollendung. Er wendete sie auf Stabilitätsuntersuchungen des Planetensystems an, noch heute lebt die theoretische Astronomie wesentlich von seinen Methoden.

Arithmetische Untersuchungen fehlen nicht. So enthält der erste Band eine Untersuchung über quadratische Gleichungen in ganzen Zahlen. Manches über Kettenbrüche, über Zahlenreihen, über numerische Auflösung algebraischer Gleichungen wäre bei einer ausführlichen Würdigung genauer zu behandeln. Nicht vergessen wollen wir die berühmte Interpolationsformel und weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand. Einen Geometer kann man LAGRANGE wohl kaum nennen, dagegen gibt es noch manche Arbeiten zur angewandten Mathematik, so ein Gutachten über die Möglichkeit, die französische Bevölkerung von 25 Millionen Menschen aus eigenen Erzeugnissen des Landes zu ernähren.

Nur über drei Werke soll noch ausführlicher gesprochen werden; die beiden ersten bilden ein Ganzes: die Théorie des Fonctions analytiques und die Leçons sur le calcul des fonctions, das dritte ist die Mécanique analytique.

Die beiden ersten Werke verdienen deshalb eine besondere Würdigung, weil sie die eigenartige Stellung LAGRANGES an der Wende zweier Entwicklungszeiten der Mathematik deutlich machen; sie schließen die Frühzeit der höheren Mathematik ab und leiten die heutige Zeit ein; sie kommen nach LEIBNIZ, den BERNOULLI und EULER und sind vor GAUSS, CAUCHY und WEIERSTRASS, d. h. vor der eigentlichen Funktionentheorie, durch die die Leistungen von LAGRANGE etwas verdunkelt werden müssen. Bezeichnend der Zusatz zum Titel: Les principes du calcul différential, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. Auch de limites, also des Grenzübergangs beraubt, in dem wir heute das Wesen der höheren Mathematik erblicken.

Der Verzicht auf jeden Grenzübergang kann natürlich nur scheinbar sein; der Grenzübergang wird nur vorverlegt. Für LAGRANGE sind alle Funktionen selbstverständlich in eine Potenzreihe entwickelbar, d. h. LAGRANGE setzt voraus, daß seine Funktionen alle analytisch sind. Von hier aus gelingt der Aufbau einer Differential- und Integralrechnung, der für seine Zeit ein bisher unerreichtes Muster an Strenge war. Zur Kennzeichnung sei sein Beweis, daß die Ableitung des Integrals $F(x)$ die primitive Funktion $f(x)$ ist, hierhergesetzt. Für eine wachsende Funktion $f(x)$ ist sicher bei $h > 0$

$$f(x+h)h > F(x+h) - F(x) > f(x)h\,;$$

nach seinem Satz vom Restglied der TAYLORschen Reihe setzt er nun

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \tfrac{1}{2}h^2F''(x+\vartheta h)$$
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\vartheta_1 h)\,,$$

woraus sich nach Division durch h ergibt

$$-\tfrac{1}{2}hF''(x+\vartheta h) < F'(x) - f(x) < h\{f'(x+\vartheta_1 h) - \tfrac{1}{2}F''(x+\vartheta h)\}\,,$$

was wegen der beliebigen Kleinheit von h nur bei $F'(x) = f(x)$ möglich ist.

Irgendwo kommt auch der WEIERSTRASSsche Satz vor, daß eine stetige Funktion zwischen zwei Stellen, wo sie verschiedene Zeichen hat, Null werden muß. Das kann er algebraisch beweisen, da er annimmt, daß von der Funktion Linearfaktoren abspaltbar sind und der Restfaktor ein festes Zeichen hat.

LAGRANGE bedeutet so einen Höhepunkt an Strenge für den Abschluß des ersten Jahrhunderts höherer Mathematik, zugleich ein Muster an Klarheit und Eleganz im GOETHEschen Sinne. Er hat sicher das Schöne des Wahren in sich empfunden und auch zum Ausdruck gebracht. Es fehlt ihm noch die eigentliche Funktionentheorie, die erst nach ihm kam; und doch leitet er sie ein, da er ganz wie WEIERSTRASS die in eine Taylorsche Reihe entwickelbare Funktion in den Vordergrund stellt.

In der Analytischen Mechanik bedeutet LAGRANGE ebenso eine Vollendung, ohne daß eine noch wesentlich steilere Entwicklung hier seine großen Leistungen verdunkelt hätte. Man kann eher sagen, daß der große Einfluß der formalen Art JACOBIS vielen den Blick auf den größeren

LAGRANGE versperrt hat. So kommt es, daß wohl keines der bekannten Lehrbücher der Analytischen Mechanik im Aufbau ganz LAGRANGE gerecht wird. Zwei Hauptgedanken beherrschen seine Mécanique analytique. Einmal die Zusammenfassung der Prinzipien der virtuellen Arbeiten und des D'ALEMBERTschen Prinzips zu dem LAGRANGEschen

$$\mathfrak{S}\, d m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{d t^2}\, \delta \mathfrak{r} = \mathfrak{S}\, d \mathfrak{K}\, \delta \mathfrak{r}\,,$$

was weltbekannt ist, dann aber als notwendiges Gegenstück die „Befreiung" von den Bindungen verschiedenster Art; die damit zusammenhängende Entwicklung besonderer Arten eingeprägter Kräfte aus den Reaktionskräften, die zunächst nur mathematische Hilfsgrößen sind. Obwohl ich darauf schon im Jahre 1916 hingewiesen habe, ist dieser Gedanke der Allgemeinheit noch fremd. Man kennt die LAGRANGEschen Parameter λ, aber man hat noch nicht verstanden, daß LAGRANGE in seinem Befreiungsprinzip eine Methode hat, ohne Zurückgreifen auf die Anschauung aus ihnen die eingeprägten Kräfte deformierbarer Körper, ihre inneren Spannungen zu gewinnen. Der innere Druck inkompressibler Flüssigkeiten ist zunächst nur ein λ, wird aber dann bei den wirklichen Flüssigkeiten eine wirkliche eingeprägte Kraft, deren „Ursache" u. a. die Volumveränderung ist, die zunächst ignoriert wurde.

Somit ist die Mécanique analytique auch heute noch unübertroffen; ja was die umfassende Anlage ihres Baues angeht, noch kaum ausgeschöpft. Im einzelnen ist vieles ausgebaut worden, technische Mechanik, physikalische Mechanik, mathematische Mechanik haben nach LAGRANGE bedeutsame Förderung erfahren, aber das Grundsätzliche ist auch heute noch bei ihm zu suchen.

Auch von uns aus gesehen zählt LAGRANGE zu den großen Klassikern der Mathematik. Er wirkt auch auf uns noch „gründlich, durchsichtig, umsichtig, rein, klar, anmutig, ja elegant".