Sonderabdruck aus
„Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums“
Heft 6

Hans Hahn †

Von

Karl Menger

Hans Hahn †

Von Karl Menger.

Am 24. Juli starb in seinem 55. Lebensjahre unerwartet Hans Hahn, der Lehrer von allen, die regelmäßig an diesem Kolloquium teilnehmen. Wir alle betrachten es als eine Dankespflicht, an dieser Stelle Lebenswerk, Lehrtätigkeit und Persönlichkeit des Verstorbenen — wenigstens mit der dem Stile dieser Ergebnisse gemäßen Konzision — zu würdigen.

Die erste Gruppe von Hahns Arbeiten war der *Variationsrechnung* gewidmet. Zunächst an Untersuchungen seines Lehrers v. Escherich anknüpfend (Monatsh. *14*, Math. Ann. *58*), wandte er sich dem Studium der Weierstraßschen Theorie und ihren Beziehungen zur zweiten Variation zu (Rend. Circ. Mat. Palermo *29*). Eingehend beschäftigte er sich mit dem Satz von Osgood, für den er einen einfachen Beweis, sowie Verallgemeinerungen angab (Monatsh. *17* u. *24*, Weber-Festschrift 1912). Weitere Arbeiten schwächen bekannte Bedingungen ab: bei der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode gewährleistet die Voraussetzung stetiger Differenzierbarkeit der Lösungen im allgemeinen deren zweimalige Differenzierbarkeit (Monatsh. *14*, Math. Ann. *63*). Ein Extremalenbogen, der ein schwaches Extremum liefert, liefert, wenn die E-Funktion in seiner Umgebung einerlei Zeichen hat, ein starkes Extremum (Wien. Ak. Ber. *118* u. Monatsh. *22*). Für räumliche Variationsprobleme führt Hahn die Frage, ob ein Extremalenbogen, dessen Endpunkt zum Anfangspunkt konjugiert ist, ein Minimum liefere, auf die Frage zurück, ob eine Funktion von zwei Veränderlichen an einer gewissen Stelle ein Minimum hat (Math. Ann. *70*). In derselben Arbeit wird insbesondere auch das Verhalten von Extremalenbogen jenseits des zum Anfangspunkt konjugierten Punktes untersucht, eine Frage, die bekanntlich für die neueste „Variationsrechnung im Großen“ von besonderer Bedeutung ist. Später hat Hahn die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in die Theorie der Funktionaloperationen eingeordnet (Wien. Ak. Ber. *131*) und ein Existenztheorem für semidefinite Variationsprobleme bewiesen, welches mehrere Sätze aus Tonellis grundlegendem Buche als Spezialfälle enthält (Wien. Ak. Ber. *134*). Ein ausgezeichneter kurzer Artikel über Variationsrechnung aus Hahns Feder findet sich in Pascals Repertorium.

Über *Punktfunktionen* bewies Hahn in Beantwortung einer Frage von Lebesgue, daß bei Zulassung der Ableitung ∞ der Fundamentalsatz der Integralrechnung seine Giltigkeit verliert (Monatsh. *16*). Weiter fand er, daß zwischen eine oberhalb stetige und eine von ihr nirgends überschrittene unterhalb stetige Funktion immer eine stetige Funktion eingeschoben werden kann (Wien. Ak. Ber. *126*) und daß für eine Funktion $f(x_1, \ldots x_n)$, die in jeder Variablen stetig ist, die Menge der Stetigkeitpunkte dicht und sogar in jeder Menge $x_i = \text{const.}$ dicht liegt (Math. Zeitschr. *4*). Damit eine Menge aus den Konvergenzpunkten einer Folge stetiger Funktionen besteht, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daß sie ein $F_{\sigma\delta}$ sei (Arch. d. Math. u. Phys. III, *28*).

Aus der Lehre von den *Mengenfunktionen* hat Hahn besonders den Integralbegriff untersucht, so den Hellingerschen und Borelschen Begriff, sowie die Approximation Lebesguescher Integrale durch Riemannsche Summen (Monatsh. *23* u. *26*, Wien. Ak. Ber. *123*). Sehr elegant ist seine Einführung des Lebesgueschen Integrals durch den Satz, daß $\int\limits_M f\,d\mu$ die einzige total additive Funktion aller meßbaren Mengen M sei, welche für jede Menge M und jede integrierbare Funktion f, deren Werte in den Punkten von M zwischen zwei Schranken c' und c'' liegen, zwischen dem c'-fachen und dem c''-fachen des Maßes von M liegt (Wien. Ak. Anz. 1928). Die Lehre von den mehrfachen Integralen ordnete er in eine Theorie des Produktes von Mengenfunktionen ein, welches er als eine Mengenfunktion des Produktraumes definierte, wobei das Reduktionstheorem für Integrale sich als assoziatives Gesetz der Multiplikation ergab (An. di Pisa *2*). In den letzten Jahren bewies Hahn einige Sätze über Mengenfunktionen in überraschend einfacher Weise durch Heranziehung von Sätzen über unendliche Reihen (Wien. Ak. Anz. 1928). Hahns Buch „Theorie der reellen Funktionen“, von dem leider nur der erste Band erschienen ist (1. Aufl. 1921, 2. Aufl. 1932), ist eines der Standardwerke dieses Gebietes.

Fouriersche Reihen und Integrale hat Hahn (Acta Math. *49*) in einer von ihm wiederentdeckten, bereits von Weyl angegebenen Stieltjesintegralformel zusammengefaßt, welche erheblich weiteren Giltigkeitsbereich besitzt, als die Fouriersche Integralformel. Darstellungen durch *singuläre Integrale* untersuchte Hahn auch an gewissen Unstetigkeitsstellen, wobei er zugleich Differenzierbarkeitsbedingungen für die Darstellung angab, ferner Summationsverfahren, Bedingungen für gliedweise Integration von Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen u. a. (Denkschr. Wien. Ak. *93*). Von besonderem Interesse ist Hahns Anwendung der für die singulären Integrale entwickelten Methoden auf das *Interpolationsproblem* (Math. Zeitschr. *1*). Er gab notwendige und hinreichende Bedingungen erstens dafür an, daß ein Interpolationsverfahren für alle stetigen Funktionen konvergiere, und zweitens dafür, daß es von endlicher Empfindlichkeit sei,

d. h. bei kleinen Änderungen der gegebenen Funktionswerte nicht allzu große Änderungen der interpolierten Funktion mit sich bringt. Es stellt sich dabei insbesondere heraus, daß Konvergenz die endliche Empfindlichkeit nach sich zieht.

In einer Theorie der *linearen Operationen* entwickelte Hahn den auch von Fréchet und Banach entdeckten Begriff des linearen Raumes (des abstrakten Vektorraumes) und faßte auf Grund der Bemerkung, daß die linearen Funktionen beschränkter Steigung der Punkte eines linearen Raumes selbst einen linearen Raum bilden, zahlreiche Sätze über Transformationen von Zahlenfolgen und von Funktionen mit Sätzen über singuläre Integrale zusammen (Monatsh. *32*). Anwendungen der Theorie machte Hahn auf lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen (Crelles Journ. *157*) und auf Reihen (Monatsh. *33*). Schon aus früheren Jahren stammt ein vorzüglicher Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen (Jahresber. d. D. M. V. *20*).

Einen wichtigen Beitrag lieferte Hahn zur *allgemeinen Arithmetik* durch seine Arbeit über nichtarchimedische Größensysteme (Wien. Ak. Ber. *116*). Seine Ergebnisse sind in der heutigen Terminologie als eine Charakterisierung der geordneten Abelschen Gruppen zu bezeichnen, u. zw. dadurch, daß sie isomorph mit Systemen hyperkomplexer Zahlen sind, deren Einheiten eine geordnete Menge (den „Klassentypus" Γ der Gruppe G) bilden und deren Koeffizienten reelle Zahlen sind, wobei zu jeder Gruppe G eine Mächtigkeit $\aleph$ gehört derart, daß jedem Elemente von G bei der Isomorphie eine hyperkomplexe Zahl entspricht, für welche nur die Einheiten einer absteigend wohlgeordneten Teilmenge von Γ, deren Mächtigkeit $< \aleph$ ist, Koeffizienten $\neq 0$ besitzen. Ist der Klassentypus Γ der Gruppe G selbst eine geordnete Abelsche Gruppe, so kann für die Elemente von G eine Multiplikation definiert werden, die G zu einem geordneten Körper macht. — Weiter hat Hahn (Wien. Ak. Ber. *122*) den Cantor-Bendixsonschen Satz und die Theorie der Kohärenzen auf geordnete Mengen übertragen.

Hahn war einer der ersten, welche die Bedeutung von Fréchets abstrakten Raumbegriffen erkannten. Er bewies (Monatsh. *19*), daß in jeder Klasse V nichtkonstante stetige Funktionen existieren (in Limesklassen nicht notwendig), bekanntlich der Kernsatz des Metrisationsproblemes — und zwar entwickelte Hahn zu seinem Beweise die später von Urysohn zum Beweis des Hauptlemmas der Metrisationstheorie benützte Methode der Umgebungsringe.

Hahns erster Beitrag zur eigentlichen *mengentheoretischen Geometrie* war der Beweis, daß bei jeder stetigen Abbildung der Strecke aufs Quadrat kontinuierlichviele Quadratpunkte mindestens je zwei Urbildpunkte besitzen und die Punkte einer im Quadrat dichten Menge mindestens je drei Urbilder (Ann. di mat. pur. ed appl. III. *21*). Die Fruchtbarkeit der damit angeschnittenen Frage geht aus den allgemeinen dimensionstheoretischen Sätzen von Hurewicz über die Multiplizität von Punkten bei dimensionserhöhenden stetigen Abbildungen hervor. — Hahns Kennzeichnung der stetigen Streckenbilder zunächst unter den ebenen Punktmengen (Jahresber. D. M. V. *24*), dann unter den metrischen Räumen (Wien. Ak. Ber. *123*, einen anderen Beweis in Atti Congr. Int. Bologna 1928) durch Kompaktheit, Zusammenhang und die (gleichzeitig und unabhängig auch von Mazurkiewicz entdeckte) Eigenschaft des Zusammenhanges im Kleinen gehört schon heute zu den klassischen Ergebnissen der mengentheoretischen Geometrie. Für den Fall ebener Punktmengen bewies Hahn auch direkt die Äquivalenz seiner Kennzeichnung mit der Schoenfliesschen durch Erreichbarkeitseigenschaften (Math. Zeitschr. *9*). Als kennzeichnend für den Zusammenhang im kleinen eines Raumes fand Hahn die Offenheit aller Komponenten aller offener Mengen (Fund. Math. *2*), was allerdings durch Kuratowski vorweggenommen war. — Hahn faßte ferner in jedem Kontinuum C die Punktepaare p, p', zu denen für jedes $\varepsilon > 0$ endlichviele Punkte $p_1 = p$, p_2, ... p_{n-1}, $p_n = p'$ existieren, so daß p_{i-1} und p_i Abstände $< \varepsilon$ haben und C in jedem Punkt p_i nicht zusammenhängend im Kleinen ist, in Primteile von C zusammen und bewies, daß jedes irreduzible Kontinuum entweder aus einem einzigen Primteil besteht oder ein Bogen von Primteilen ist (Wien. Ak. Ber. *130*; für einen sehr kurzen Beweis vgl. Hausdorff, Mengenlehre 2. Aufl.). Die Fruchtbarkeit des Primteilbegriffes geht auch aus einem Satz von R. L. Moore hervor (Vgl. Hausdorff a. a. O.).

Von sonstigen mathematischen Arbeiten Hahns seien insbesondere noch zwei erwähnt, die anderen als den bisher besprochenen Gebieten angehören: In der einen (Monatsh. *16*) übertrug er den Weierstraßschen Produktsatz auf Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. In der anderen (Monatsh. *19*) gab er den ersten lückenlosen Beweis des Jordanschen Kurvensatzes für Polygone mit elementaren Mitteln (Verknüpfungs- und Anordnungaxiomen). Diese Ergänzung zu Veblen's Arbeit über die Axiome der Geometrie (Ann. Trans. *5*) lieferte zugleich eine restlose Vervollständigung von Veblens Beweis des Jordanschen Satzes für beliebige einfache geschlossene Kurven aus dem Jahre 1905 (Ann. Trans. *6*). Zerlegungen des n-dimensionalen Raumes wurden im Anschluß an Hahns Arbeit von Lilly Hahn behandelt (Monatsh. *25*).

Neben der Mathematik beschäftigte sich Hahn in den letzten Jahren zunehmend mit Logik und Erkenntnistheorie. Nach Veröffentlichung einer noch heute lesenswerten Besprechung des bekannten Pringsheimschen Lehrbuches (Gött. gel. Anz. 1919) begann er in den ersten Nachkriegsjahren ein eingehendes Studium der Logistik, das ihn nicht nur zu einem besonderen Bewunderer, sondern sicher auch zu einem der besten Kenner von Russell machte. In der Folge schloß er sich dem bekannten Wiener Kreis an. Seine eigenen Auffassungen sind insbesondere in dem Artikel „Die Bedeutung der wissenschaftlichen Weltauffassung für Mathematik und Physik“ (Erkenntnis *1*) und in drei Vorträgen niedergelegt: „Logik, Mathematik und Naturerkennen“ (bei Gerold, Wien 1933) setzt sich mit der empiristischen

Auffassung auseinander, „Die Krise der Anschauung“ (bei Deuticke, Wien 1933) mit der intuitionistischen, der Vortrag „Gibt es Unendliches?“ (bei Deuticke, Wien 1934) skizziert Hahns eigenen logizistischen Standpunkt.

Als akademischer Lehrer hielt Hahn Vorlesungen über die verschiedensten Teile der Mathematik, wie überhaupt sein mathematisches Wissen sehr umfassend war. (Als auf einer deutschen Mathematikertagung an einem Tisch, an dem mehrere bekannte Kollegen saßen, darunter einer der hervorragendsten lebenden Zahlentheoretiker, ein Frage- und Antwort-Spiel zur Feststellung der mathematischen Allgemeinbildung gespielt wurde, blieb Hahn Sieger.) Alle Vorlesungen wurden von Hahn sorgfältig ausgearbeitet und waren vorbildlich an Klarheit. — Unübertrefflich war er als Seminarleiter und viele Anregungen, die er durch seine Seminare gab, waren außerordentlich wertvoll. Zahlreiche Schüler haben im Laufe der Jahre unter Hahns Anleitung gearbeitet und Dissertationen verfaßt, darunter einige Abhandlungen ersten Ranges, wie die von Hurewicz und Gödel. Ich selbst verdanke die Anregungen zu meiner gesamten wissenschaftlichen Tätigkeit der ersten Seminarstunde, die er im April 1921 nach seiner Berufung an die Wiener Universität abhielt und in der er nach einer unsere anschauliche Kurvenvorstellung wiedergebenden Definition fragte. — Auch Hahns Vorträge für größeres Publikum erfreuten sich großer Beliebtheit. Sie waren nicht nur stets von besonderer Klarheit — so wie auch die von Hahn gemeinsam mit Tietze verfaßte „Einführung in die Elemente der höheren Mathematik“ — sondern enthielten stets auch irgendwelche neue Gedanken.

Grundzug von Hahns Persönlichkeit war eine Sachlichkeit, die ich nicht besser kennzeichnen kann, als mit Worten, die R. Meister bei seiner Bestattung sprach: „Hahn ist nie für eine Sache eingetreten, von der er nicht voll und ganz überzeugt war“. Er wurde deshalb stets auch von seinen Gegnern hochgeachtet. Wenn er seine persönlichen Gefühle zeigte, so waren es stets solche der Güte und des Wohlwollens. Er scheute keine Mühe, um arme Studenten zu fördern oder einem allgemein nützlichen Zweck zu dienen. Wo er eine Gelegenheit fand, für Hilflose einzutreten, ließ er sie nie vorübergehen, mochte es sich auch nur um arme Tiere handeln. Als er einmal auf der Straße einen Kutscher sein Pferd mißhandeln sah und sein Einspruch erfolglos blieb, schleppte er den Rohling mit Gewalt vor einen Polizisten. Überhaupt hat Hahn, dessen normale Umgangsformen sich durch besondere Liebeswürdigkeit auszeichneten, wenn er beschlossen hatte, für etwas einzutreten, stets ohne Rücksicht auf die ihm selbst daraus erwachsenden Schwierigkeiten mit Energie und Konsequenz es zu Ende geführt.

In diesem Kolloquium wird seiner stets mit Verehrung und Dankbarkeit gedacht werden.

Druck von Gottlieb Gistel & Cie., Wien, III., Münzgasse 6.