Sonderdruck aus Jahresbericht der
Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 55, Heft 3
Verlag für Wissenschaft und Fachbuch, Bielefeld

Harald Bohr.

Von OSKAR PERRON in München.

Am 22. Januar 1951 schied Harald Bohr, der seit 1913 der DMV als Mitglied angehört hat, erst 63jährig aus dem Leben. Nur wenige Tage vorher hatte er, nachdem er sich schon einige Zeit unpäßlich fühlte, eine Klinik aufgesucht, wo dann ein Krebsgeschwür am Darm festgestellt wurde. Eine Operation war notwendig, die aber nicht den erhofften Erfolg brachte, so daß man zu einem zweiten Eingriff schreiten mußte. Es war wieder vergeblich, schon in der folgenden Nacht verschied er. Mit ihm hat die mathematische Wissenschaft wieder einen ihrer Großen verloren.

Bohr wurde am 22. April 1887 als Sohn des bedeutenden Physiologen Professor Christian Bohr in Kopenhagen geboren und blieb seiner Vaterstadt zeitlebens treu. Er studierte daselbst seit 1904, ward 1909 Magister, 1910 Doktor und Dozent an der Universität. Schon 1915 kam er als o. Professor an die Technische Hochschule und 1930 wieder an die Universität, wo er das große in enger räumlicher und geistiger Verbindung mit dem Physikalischen Institut seines Bruders Niels Bohr stehende Mathematische Institut ins Leben rief, an dem stets ein reger wissenschaftlicher Betrieb herrschte und auch viele ausländische Gelehrte sich häufig Rendezvous mit den Dänen gaben. 1946 übernahm er neben seinen Vorlesungen und seiner wissenschaftlichen Tätigkeit noch eine umfassende Erziehungsaufgabe als Vorstand des altehrwürdigen Studentenkollegiums „Regensen". Wissenschaftliche Ehrungen wurden ihm reichlich zuteil. Er gehörte selbstverständlich der Dänischen Akademie der Wissenschaften an, aber auch viele ausländische Akademien, in Deutschland z. B. München und Göttingen, hatten ihn zum korrespondierenden Mitglied gewählt.

Bohrs wissenschaftliches Schaffen war hauptsächlich der Funktionentheorie gewidmet, in deren schwierigsten Zweigen er führend und bahnbrechend war. Es soll versucht werden, ein Bild seines Lebenswerkes zu zeichnen. In seiner Erstlingsarbeit vom Jahr 1908 beschäftigte er sich mit der Multiplikation bestimmter Integrale mit unendlichen Grenzen. Wenn beide absolut konvergieren, ist es leicht, für ihr Produkt eine der Cauchyschen Produktformel für unendliche Reihen analoge Formel zu beweisen. Bohr zeigte, daß diese Formel noch gültig bleibt, wenn nur *eines* der beiden Integrale absolut konvergiert. Wenn keines absolut konvergiert, wird das formale Produktintegral im allgemeinen überhaupt nicht mehr konvergieren; aber Bohr konnte die Formel trotzdem retten, indem er den Integralwert durch eine Art von Cesàroschem Mittelwert definierte, so daß vollkommene Analogie zu den unendlichen Reihen hergestellt war. Bereits im nächsten Jahr fand Bohr den Weg zu den Dirichletschen Reihen, deren Studium ihn nun sein ganzes Leben gefangen nahm. Das Markanteste, was er auf diesem Gebiet im Lauf der Jahre erarbeitet hat, soll kurz gewürdigt werden. Dabei handelt es sich teils um die speziellen Dirichletschen Reihen

$$(1) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\log n \cdot s},$$

teils um die allgemeinen

$$(2) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots, \lim \lambda_n = \infty),$$

wobei mit dem Funktionszeichen f gelegentlich auch über das Konvergenzgebiet hinaus die analytische Fortsetzung der Reihe bezeichnet werden soll. Die komplexe Variable sei in üblicher Weise mit $s = \sigma + i t$ bezeichnet. Bekannt war, daß es eine Konvergenzabszisse σ_1 gibt, derart, daß die Reihe für $\sigma > \sigma_1$ konvergiert (Konvergenzhalbebene), für $\sigma < \sigma_1$ divergiert; ferner eine Abszisse *absoluter* Konvergenz σ_2 mit analoger Bedeutung, wobei $-\infty \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \infty$ ist. Beide Abszissen lassen sich zwar aus den a_n und λ_n formelmäßig berechnen, sie haben aber mit dem analytischen Verhalten der Funktion zunächst nicht viel zu tun. Daher hat Bohr noch die Abszisse *gleichmäßiger* Konvergenz σ_3 eingeführt (Comptes Rendus **151**), worunter folgendes zu verstehen ist: Die Reihe ist trivialerweise für $\sigma \geq \sigma_2 + \varepsilon$ gleichmäßig konvergent, ebenso auch in jedem beschränkten Teil der Halbebene $\sigma \geq \sigma_1 + \varepsilon$, im allgemeinen aber nicht in der ganzen Halbebene. Nun wird σ_3 als die untere Grenze derjenigen Zahlen σ' definiert, für welche die Reihe in der ganzen Halbebene $\sigma \geq \sigma'$ gleichmäßig konvergiert; natürlich ist $\sigma_1 \leq \sigma_3 \leq \sigma_2$. Die Abszisse σ_3 hat unter gewissen Voraussetzungen über die Exponenten λ_n, die z. B. bei der Reihe (1) erfüllt sind, die Eigenschaft, daß die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geq \sigma_3 + \varepsilon$ regulär und beschränkt ist, für $\sigma \geq \sigma_3 - \varepsilon$ aber nicht mehr. Wenn sie für $\sigma \geq \sigma_3 - \varepsilon$ noch regulär ist, folgt daraus, daß sie im Streifen $\sigma_3 - \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma_3 + \varepsilon$ nicht beschränkt sein kann, und daraus läßt sich weiter schließen, daß sie jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme annimmt.

Von nicht minderer Bedeutung für die Reihe (1) ist die in den Göttinger Nachrichten 1909 von Bohr eingeführte „Summabilitätsgrenzabszisse" σ_4. Zu ihr gelangte er, indem er zunächst bewies, es gibt für jedes r (= 0, 1, 2, ...) eine Abszisse μ_r derart, daß die Reihe für $\sigma > \mu_r$ von der r^{ten} Ordnung Cesàro-summierbar ist, für $\sigma < \mu_r$ nicht. Dabei ist $\mu_{r+1} \leq \mu_r$ (trivial) und $\mu_{r+1} - \mu_{r+2} \leq \mu_r - \mu_{r+1}$ (nicht trivial). σ_4 ist nun der Grenzwert $\lim \mu_r$, der wegen $\mu_{r+1} \leq \mu_r$ existiert (eventuell $-\infty$). Bohr zeigte dann: Für $\sigma \geq \sigma_4 + \varepsilon$ ist $f(s)$ regulär und es gilt die Abschätzung $f(\sigma + it) = O(|t|^K)$, wo K eine Konstante; für $\sigma \geq \sigma_4 - \varepsilon$ gilt das nicht mehr. Wenn also die Funktion für $\sigma \geq \sigma_4 - \varepsilon$ noch regulär ist, so kann sie in dem Streifen $\sigma_4 - \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma_4 + \varepsilon$ nicht mehr von endlicher Größenordnung $|t|^K$ sein, und daraus konnte Bohr weiter folgern (Sitzungsber. Akad. Wien 1910), daß sie in diesem Streifen jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft annimmt.

Ein interessantes Problem bei Dirichletschen Reihen war immer die Frage nach ihren Nullstellen. Bei einer Reihe mit absoluter Konvergenzhalbebene überwiegt das erste Glied für genügend große σ den ganzen Rest, woraus sofort folgt, daß eine ganze Halbebene nullstellenfrei ist. Beim Fehlen einer absoluten Konvergenzhalbebene ist das anders. 1908 war von mir gezeigt worden, daß in dem Bereich $t < e^{M\sigma}$, auch wenn M beliebig groß ist, so daß er fast einer Halbebene gleichkommt, nur endlich viele Nullstellen liegen können. Aber ob es stets auch eine nullstellenfreie Halbebene gibt, war eine offene Frage geblieben. Bohr hat sie 1911 beantwortet, indem er zeigte (Rend. Circ. Mat. Palermo **31**), daß es keine solche Halbebene zu geben braucht. Er konstruierte nämlich eine spezielle Folge von Exponenten λ_n und eine Folge von Zahlen t_m derart, daß die Reihe

$$e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_2 s} + e^{-\lambda_3 s} - e^{-\lambda_4 s} + - \ldots$$

die unendlich vielen Nullstellen $m + i t_m$ hat. Wegen meines erwähnten Satzes müssen die t_m natürlich ungeheuer rasch wachsen. Eine zweite 1908 offen gebliebene Frage war die, ob bei dem Integral

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \frac{ds}{s^\varrho},$$

das, wie ich damals zeigen konnte, für $\varrho \geq 1$ gliedweise Integration zuläßt, auch für $\varrho < 1$ dasselbe gilt. Bohr konnte 1942 durch ein raffiniert konstruiertes Gegenbeispiel zeigen, daß das nicht der Fall ist (Kopenhagener Meddelelser **20**).

Genial und äußerst fruchtbar war der Gedanke von Bohr, zur Untersuchung der Funktion (2) auf einer Geraden $\sigma = \sigma_0$ oder in einer Halbebene $\sigma > \sigma_0$ den Kroneckerschen Approximationssatz (KrAp) heranzuziehen oder eigentlich eine leichte Modifikation, die folgendes besagt: Wenn zwischen den n reellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ keine lineare homogene Relation mit rationalen Koeffizienten besteht und wenn $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ beliebige reelle Zahlen sind, so gibt es n ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und eine reelle Zahl t derart, daß für $\nu = 1, \ldots, n$

$$|\lambda_\nu t - \varrho_\nu - x_\nu| < \varepsilon \; (= \text{beliebig klein})$$

ist. Es geschah das erstmals 1911 bei einer Untersuchung über die Zetafunktion. Doch soll hier zuerst über eine andere sehr tiefgründige Arbeit von 1912 berichtet werden (Acta Math. **36**). In dieser gelang es Bohr, für die Reihe (2) die absolute Konvergenzabszisse mit dem analytischen Verhalten der Funktion in Verbindung zu bringen, wenn die λ_n linear unabhängig sind, d. h. wenn zwischen je endlich vielen keine lineare homogene Relation mit rationalen Koeffizienten besteht. Zu dem Zweck hat er die Menge der Werte, die von der Funktion der einen Variabeln t (bei festem σ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(\sigma+it)} \quad \text{(absolute Konvergenz vorausgesetzt)} \tag{3}$$

angenommen werden, verglichen mit den Werten, die von der Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(\sigma+i\tau_n)} \tag{4}$$

angenommen werden, wenn die unendlich vielen τ_n unabhängig voneinander variieren. Man kann unschwer erraten, daß beide Mengen ungefähr dieselben sein werden, da ja zu jedem Wertesystem $\lambda_n \tau_n$ nach dem KrAp ein Wert t angegeben werden kann, für den beliebig viele Reihenglieder von (3) den entsprechenden Gliedern von (4) beliebig nahe liegen. Die von (4) angenommene Wertemenge ist aber leicht zu beschreiben. Sie besteht, falls unter den Zahlen $|a_n| e^{-\lambda_n\sigma}$ keine ist, die die Summe aller anderen übertrifft, in der Zahlenebene aus allen Punkten des Kreises $|z| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| e^{-\lambda_n\sigma}$ und, falls etwa $|a_1| e^{-\lambda_1\sigma} > \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| e^{-\lambda_n\sigma}$ ist, aus allen Punkten des Kreisringes

$$|a_1| e^{-\lambda_1\sigma} - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| e^{-\lambda_n\sigma} \leq |z| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| e^{-\lambda_n\sigma}.$$

Freilich ist es von dem unschweren Erraten eines ungefähren Sachverhalts bis zum Beweis exakt formulierter Sätze noch ein weiter und recht dornenvoller Weg, der hier im einzelnen nicht durchlaufen werden kann. Aber Bohr bewies so zunächst das zu erwartende Resultat, daß die Menge der von der Reihe (3) angenommenen Werte in dem erwähnten Kreis bzw. Kreisring enthalten ist und dort überall dicht liegt, und gewann darüber hinaus u. a. noch die folgenden überraschenden Sätze: I. Wenn die Reihe (2) für $\sigma > B$ absolut konvergiert, für $\sigma = B$ aber nicht, dann nimmt sie in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert an. II. Wenn die Reihe (2) überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt, so ist für die *absolute* Konvergenz im Bereich $\sigma \gtrsim \beta$ notwendig und hinreichend, daß die Funktion $f(s)$ für $\sigma > \beta$ regulär und beschränkt ist („notwendig" ist trivial, aber „hinreichend" ist frappant). Bei all diesen Sätzen ist die lineare Unabhängigkeit der λ_n wesentlich. Ohne diese Voraussetzung werden sie falsch, wie Bohr am Schluß der Arbeit noch durch Konstruktion von Gegenbeispielen nachwies.

Die geschilderte Art der Verwendung des KrAp ist bei der Reihe (1) nicht möglich, weil die Exponenten $\lambda_n = \log n$ nicht linear unabhängig sind; z. B. ist ja $\log 2 + \log 3 - \log 6 = 0$. Diese Schwierigkeit hat Bohr dadurch überwunden (Gött. Nachr. 1913), daß er, unter $p_1, p_2, \ldots$ die Folge der Primzahlen verstehend, so daß jede positive Zahl n eindeutig in der Gestalt $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ geschrieben werden kann (die Exponenten $\geqq 0$), der Reihe (1) die Form

$$(1a) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, p_1^{-\alpha_1 s}\, p_2^{-\alpha_2 s} \ldots p_r^{-\alpha_r s}$$

gab und ihr die Funktion von unendlich vielen Variabeln

$$(5) \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_r^{\alpha_r}$$

zuordnete, so daß

$$f(s) = \varphi(p_1^{-s}, p_2^{-s}, p_3^{-s}, \ldots)$$

ist. Dann hat er, wenn die Reihe (1) = (1a) für $\sigma \gtrsim \sigma_0 - \varepsilon$ absolut konvergiert, die Menge U der von der Funktion $f(\sigma_0 + it)$ im Bereich $-\infty < t < \infty$ angenommenen Werte auf Grund des KrAp verglichen mit der Menge V derjenigen Werte, die von der Funktion $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ angenommen werden, wenn die x_ν unabhängig voneinander die Kreisperipherien $|x_\nu| = p_\nu^{-\sigma_0}$ durchlaufen. Er fand, daß U in V enthalten ist (trivial) und in V überall dicht liegt (die tiefliegende Quintessenz). Ferner hat er noch die Menge W derjenigen Werte betrachtet, die $f(s)$ in jedem Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$, wie klein auch δ sei, annimmt, und hat gezeigt, daß $W = V$ ist. In einer späteren Arbeit (Math. Ann. **79**) bewies Bohr auch noch, daß W abgeschlossen ist, und dehnte außerdem die Überlegungen auf die allgemeinen Reihen (2) mit einer absoluten Konvergenzhalbebene aus. Das gelang ihm dadurch, daß er die Exponenten λ_n additiv aus einer *Basismenge* zusammensetzte, ähnlich wie die ganzen Zahlen multiplikativ aus den Primzahlen, ihre Logarithmen also additiv zusammengesetzt sind. So konnte er die Reihe (2) sofort in einer zu (1a) analogen Form schreiben und dann die zu (5) analoge Reihe einführen, worauf er die Wertemengen U, V, W

wie oben definierte. Als Resultat ergab sich, daß immer noch die Menge U in V enthalten und darin überall dicht ist, sowie auch, daß W abgeschlossen, und zwar die abgeschlossene Hülle von U und von V ist, während die Beziehung $W = V$ nur unter einer einschränkenden Bedingung für die Exponenten λ_n gilt.

Die berühmteste Dirichletsche Reihe ist die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{6}$$

Der Kampf um die Zetafunktion mit dem Ziel, die Riemannsche Vermutung (RV), daß ihre nicht reellen Nullstellen alle den Realteil $\frac{1}{2}$ haben, als richtig nachzuweisen, was für die Zahlentheorie (Verteilung der Primzahlen) von eminenter Bedeutung wäre, glich im letzten halben Jahrhundert einer spannenden Detektivgeschichte. Die eifrigsten und einfallsreichsten Detektive waren Landau, Hardy, Bohr. Aber trotz allen Scharfsinns und Spürsinns konnte der Zetafunktion ihr letztes Geheimnis, die RV, bis heute nicht entrissen werden. Sie hat sich als jene Irene Adler erwiesen, die selbst der kluge Sherlock Holmes nicht fangen konnte. Und der Vergleich geht weiter: Wie der königliche Auftraggeber, obwohl das eigentliche Ziel nicht erreicht war, sich trotzdem über das Resultat begeistert zeigte und seiner Bewunderung und Dankbarkeit Ausdruck verlieh, so können auch wir, die am Resultat brennend interessierte mathematische Mitwelt und vielleicht auch noch geraume Zeit die Nachwelt, obwohl das letzte Ziel nicht erreicht worden ist, doch nicht umhin, dem von den heute toten Detektiven bewiesenen Scharfsinn und den von ihnen eben doch gewonnenen Erkenntnissen die höchste Bewunderung zu zollen. Bohrs Anteil soll jetzt in den Hauptzügen dargelegt werden.

In einer Gemeinschaftsarbeit mit Landau (Gött. Nachr. 1910) ergab sich, daß $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ nicht beschränkt ist; ferner, daß nicht $\zeta(1 + it) = o(\log\log t)$ ist und daß $\zeta(s)$ im Streifen $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$, wie klein auch δ sei, jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft annimmt. Kurz danach fand Bohr (Gött. Nachr. 1911), und zwar unter wesentlicher Verwendung des KrAp, daß sogar im Streifen $1 < \sigma < 1 + \delta$ jeder von 0 verschiedene Wert unendlich oft angenommen wird (der Wert 0 natürlich überhaupt nicht, weil in dem Streifen ja die Eulersche Produktformel für die Zetafunktion gilt). Littlewood fand im Jahr 1912, daß das Produkt $\zeta(s) \cdot \zeta'(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1 - \delta$ unendlich viele Nullstellen hat; damit war die RV beinahe widerlegt. Aber gleich darauf konnte Bohr zeigen (Crelle **141**), daß es eine Sackgasse war; schon $\zeta'(s)$ hat die Nullstellen. Ein sehr bedeutsamer Fortschritt in Richtung auf die RV ist 1914 in einer Gemeinschaftsarbeit mit Landau erzielt worden (Rend. Circ. Mat. Palermo **37**). Hier ward zunächst von der allgemeinen Reihe (1) folgendes gezeigt: Wenn sie für $\sigma > 0$ konvergiert und nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind, dann gilt für die Anzahl ihrer Nullstellen im Bereich $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$, $-T < t < T$ die Abschätzung $O(T)$. Nun erfüllt die Reihe (6) nach Multiplikation mit $1 - 2^{1-s}$ die Voraussetzung dieses Satzes, so daß sich unter Berücksichtigung bekannter Symmetrieeigenschaften der Zetafunktion ergab, daß in den beiden Streifen $0 < \sigma < \frac{1}{2} - \delta$ und $\frac{1}{2} + \delta < \sigma < 1$ die Anzahl der Nullstellen mit $-T < t < T$ gleich $O(T)$ ist, was übrigens mit gleichem Beweis auch gleich für alle Dirichletschen L-Funktionen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s}$ mit beliebigem Charakter $\chi(n)$ festgestellt werden konnte. Da anderseits längst bekannt war, daß die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Bereich $0 < \sigma < 1$, $-T < t < T$ gleich $\frac{1}{\pi} T \cdot \log T + O(T)$ ist, so folgt, roh ausgedrückt, daß die Nullstellen des Streifens $0 < \sigma < 1$ fast alle unendlich nahe an der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen, also schon *beinahe* die RV. In einer Gemeinschaftsarbeit mit Courant (Crelle **144**) konnte gezeigt werden, daß die Menge der Werte, die $\zeta(s)$ auf einer beliebigen Geraden $\sigma = \sigma_0$ mit $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$ annimmt, in der ganzen Zahlenebene überall dicht ist, und in einer anschließenden Arbeit (Acta Math. **40**) bewies Bohr, daß für die Anzahl $M_{a,\alpha,\beta}(T)$ der a-Stellen im Rechteck $\alpha < \sigma < \beta$, $-T < t < T$, wo $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ ist, die Formeln

$$(7) \qquad \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{M_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0 \qquad \text{für } a \neq 0,$$

$$(8) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{M_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} = 0 \qquad \text{für } a = 0$$

gelten, womit wieder eine wesentliche Stütze für den Glauben an die RV gewonnen war. Dies um so mehr, als ein Teil der Ergebnisse schon früher gerade unter der Hypothese, daß die RV zutrifft, hatte bewiesen werden können. Mußte da nicht der jetzt ohne diese Hypothese geführte Beweis Bestandteile enthalten, die sich für einen Vorstoß gegen die RV verwerten lassen? Aber es ging nicht weiter. Die beiden Arbeiten sind übrigens, was die Methode anbelangt, noch durch zwei Umstände bemerkenswert: Erstens konnte erstaunlicherweise aus der Eulerschen Produktdarstellung der Zetafunktion Nutzen gezogen werden, obwohl sie in dem betrachteten Gebiet gar nicht gilt; zweitens ward die kurz vorher von Weyl entdeckte Verschärfung des KrAp, die unter dem Namen „Gleichverteilung" bekannt ist, herangezogen und in der Crelle-Arbeit auch gleich mit einem neuen sehr durchsichtigen Beweis versehen. Die Resultate wurden 15 Jahre später in zwei Gemeinschaftsarbeiten mit Börge Jessen (Acta Math. **54** und **58**) noch wesentlich erweitert und vertieft, wobei insbesondere die Formel (7) dahin verfeinert werden konnte, daß sogar der lim (nicht bloß $\overline{\lim}$) existiert und endlich ist. Doch soll auf weitere Einzelheiten jetzt nicht mehr eingegangen werden, damit noch Raum für anderes bleibt.

In der Zwischenzeit hatte nämlich Bohr der Mathematik noch ein völlig neues Gebiet erschlossen, das Reich der fastperiodischen Funktionen. Daher will ich die Zetafunktion jetzt verlassen, um mich diesen neuen Funktionen zuzuwenden, die gewiß als Bohrs bedeutendste Schöpfung anzusehen sind. Das Rätsel der RV wird ja wohl in naher oder ferner Zukunft eines Tages durch neuartige Methoden gelöst werden und dann werden die darauf bezüglichen Bemühungen der Detektive vielleicht der Vergessenheit anheim fallen oder nur noch den Historiker interessieren. Nicht so leicht untergehen wird aber die von Bohr geschaffene Theorie der fastperiodischen Funktionen; die ist unzweifelhaft ein „monumentum aere perennius", wie es nur wenige begnadete Geister sich zu errichten vermögen. Die Idee zu dieser Theorie geht zurück auf eine im Jahr 1922 von Bohr gemachte Entdeckung (Math. Ann. **85**), die sich auf die Reihe (1) bezieht und die oben noch nicht besprochen wurde: Wenn ω ein abgeschlossener beschränkter Bereich im Innern der gleichmäßigen Konvergenzhalbebene ist (unter gewissen Voraussetzungen darf er auch ein Stück nach links darüber hinausgehen), so gibt es zu jedem positiven ε sowohl positive als negative absolut beliebig große Zahlen τ derart, daß für alle s in ω die Ungleichung $|f(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon$ gilt. Dabei können den Zahlen τ noch gewisse Bedingungen auferlegt werden. Aus diesem Satz ergibt sich a. a. O. speziell für die Dirichletschen L-Funktionen mit Nicht-Hauptcharakter eine sehr merkwürdige Folgerung, die hier außer Betracht bleiben mag. Der Satz selbst aber gab Bohr die Anregung, sich die Frage zu überlegen, ob es nicht auch andere Funktionen gibt, die solche „Quasiperioden" τ haben, und welche Forderungen man den Quasiperioden etwa auferlegen muß, damit die Gesamtheit dieser Funktionen eine schön abgerundete Klasse bildet derart, daß z. B. Summe und Produkt sowie die Limesfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge solcher Funktionen wieder zur Klasse gehören. Nachdem verschiedene Möglichkeiten, die sich zunächst darboten, als ungeeignet erkannt waren, gelangte Bohr schließlich zu folgender Definition: Eine für alle reellen x definierte und stetige (komplexwertige) Funktion $f(x)$ heißt fastperiodisch (fp), wenn jedem positiven ε eine

Länge $l = l(\varepsilon)$ derart zugeordnet werden kann, daß es in jedem Intervall der Länge l eine „zu ε gehörige Verschiebungszahl" τ gibt, d. h. ein τ, welches die Ungleichung $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ für alle x erfüllt. Daß mit dieser Definition wirklich das Richtige getroffen war, hat die ganze weitere Entwicklung gezeigt. Bohr hat nach zwei kurzen Comptes-Rendus-Noten die fp Funktionen zunächst in drei umfangreichen heute schon als klassisch zu bezeichnenden Arbeiten behandelt (Acta Math. **45**, **46**, **47**), und zwar in den ersten beiden die Funktionen einer reellen Variabeln, in der dritten die Ausdehnung ins Komplexe. Der Kürze halber soll mein Bericht auf das Reelle beschränkt werden. Die Hauptresultate sind folgende:

Für jedes reelle λ existiert der Grenzwert

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = a(\lambda), \tag{9}$$

aber nur für eine höchstens abzählbare Menge $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ist er von 0 verschieden. Dadurch wird der fp Funktion eine eindeutig bestimmte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n)\, e^{i\lambda_n x} \tag{10}$$

formal zugeordnet, die als ihre Fourierreihe bezeichnet wird und in dem Spezialfall, daß $f(x)$ eine periodische, folglich trivialerweise auch eine fp Funktion ist, mit der gewöhnlichen Fourierreihe übereinstimmt. Dabei ist für die Glieder keine bestimmte Reihenfolge vorgesehen und von Konvergenz ist keine Rede. Wenn aber die Reihe einmal für alle x gleichmäßig konvergiert und folglich eine fp Funktion darstellt (denn ihre einzelnen Glieder sind ja periodische, also gewiß fp Funktionen), so ist sie für eben diese Funktion die Fourierreihe. Wie schon gesagt, fallen die gewöhnlichen Fourierreihen darunter, die λ_n bilden dann eine arithmetische Reihe. Ebenso fallen aber auch die Dirichletschen Reihen $f(\sigma + it)$ bei festem σ als Funktionen von t darunter, die λ_n haben dann nur $-\infty$ als Häufungspunkt. Im Bereich *aller* fp Funktionen unterliegen aber die λ_n keinerlei Einschränkung, sie können z. B. auch überall dicht liegen.

Diese Fourierreihe hat nun mit den gewöhnlichen Fourierreihen einige bemerkenswerte Eigenschaften gemein, die sich aber nur zum Teil in ähnlicher Weise beweisen lassen: Sie stellt die fp Funktion „im Mittel" dar, womit folgende Beziehung gemeint ist:

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Big| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a(\lambda_n)\, e^{i\lambda_n x} \Big|^2 dx = 0. \tag{11}$$

Sodann gilt auch das Analogon zur Parsevalschen Formel

$$(12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a(\lambda_n)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx,$$

sowie der Satz, daß, wenn alle Fourierkoeffizienten verschwinden, d. h. wenn der Limes in (9) für alle λ verschwindet, dann die fp Funktion identisch null ist. Kein Analogon in der Theorie der periodischen Funktionen hat der Satz, daß, wenn die λ_n linear unabhängig sind, nicht nur die Reihe in (12) konvergiert, sondern die Reihe (10) selbst absolut und gleichmäßig konvergiert und die fp Funktion darstellt. Zum Beweis dieses sehr überraschenden Satzes muß natürlich, da die lineare Unabhängigkeit eine Rolle spielt, wieder der KrAp herangezogen werden. Das Analogon zu einem bekannten Satz von Fejér lautet: $f(x)$ läßt sich gleichmäßig durch eine Folge endlicher Summen

$$(13) \qquad \sum_{n=1}^{N} b_n e^{i\lambda_n x}$$

approximieren, wobei die λ_n eben die obigen Exponenten, die b_n aber keineswegs gleich den $a(\lambda_n)$ sind. Der Beweis dieses Satzes ist ungleich schwieriger als im Fejérschen Fall der reinperiodischen Funktionen und er wäre kaum gelungen, hätte Bohr sich nicht früher so intensiv mit der Wertverteilung Dirichletscher Reihen befaßt. Ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweis, zu dem freilich noch allerhand anderes hinzukommt, was hier übergangen werden muß, besteht nämlich darin, daß die Wertemenge der Funktion in ähnlicher Weise, wie es vorher bei den Dirichletschen Reihen gemacht worden war und oben geschildert wurde, auf Grund des KrAp verglichen wird mit der Wertemenge einer zugeordneten Funktion von unendlich vielen Variabeln. Das Merkwürdige ist nun, daß sich der Satz auch umkehren läßt: Jede durch Summen der Form (13) mit irgendwelchen λ_n gleichmäßig approximierbare Funktion ist fastperiodisch. Mit dieser Erkenntnis war eine zweite von der ersten völlig verschiedene Definition der fp Funktionen gewonnen, die sich in der Folge als äußerst fruchtbar erwies.

Was sonst noch in den drei Acta-Arbeiten steht, und was Bohr in der Folgezeit noch weiter zu dem Thema zu sagen hat, mag hier übergangen werden. Erwähnt sei nur noch der instruktive Bericht über das Gesamtgebiet in Band 1 der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" (1932). Besser als durch ein Resumé, das doch nur lückenhaft sein könnte, wird die Bedeutung, die tiefgreifende Wirkung und ungewöhnliche Fruchtbarkeit der Bohrschen Entdeckung durch die Tatsache beleuchtet, daß sie wie eine Bombe einschlug. Überall in der Welt, wo überhaupt Mathematik getrieben wird, stürzten sich sogleich zahlreiche Forscher auf das neue Gebiet, beteiligten sich mit Eifer am weiteren Ausbau und schlugen auch Brücken zu anderen Teilen der Mathematik, so daß heute die Literatur über fp Funktionen bereits einen kaum mehr übersehbaren Umfang erreicht hat und noch täglich weiter wächst.

Mit den Dirichletschen Reihen, der Zetafunktion und den fp Funktionen ist Bohrs wissenschaftliches Lebenswerk nicht erschöpft. Der KrAp, der ihm stets so gute Dienste geleistet hat, lag ihm natürlich sehr am Herzen und so wird es niemand wundern, daß er für diesen eine ganze Reihe neuer Beweisanordnungen geliefert hat. Aber in einem guten Dutzend weiterer Arbeiten hat sich Bohr auch mit weit abliegenden schwierigen Problemen befaßt und diese im allgemeinen so restlos gelöst, daß nichts mehr zu tun übrig blieb. Schon die zu Beginn besprochene Erstlingsarbeit gehört hierher. Sodann hat er z. B. in Band **1** der Math. Zeitschr. gezeigt, daß eine Funktion $f(z)$, die ein Gebiet G schlicht auf ein Gebiet Γ so abbildet, daß in jedem Punkt z_0 ein bestimmter Maßstab herrscht, d. h. daß der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right|$$

existiert und nicht verschwindet, bereits analytisch ist, so daß der Limes also ganz von selbst auch ohne Absolutstriche existiert; der Satz gilt nicht mehr, wenn man die Forderung der Schlichtheit fallen läßt. In den Sitzungsber. der Berliner Akad. 1929 hat er eine von Borel 1899 gestellte und seitdem offen gebliebene Frage entschieden: Wenn in der z-Ebene eine ins Unendliche laufende Kurve K und eine (beliebig enge) Umgebung G von K, d. h. eine offene Punktmenge, die K enthält, gegeben ist, so gibt es eine ganze transzendente Funktion $f(z)$, für die $|f(z)| < \varepsilon$ ist, sobald z in der Komplementärmenge von G und außerhalb eines Kreises von genügend großem Radius $R(\varepsilon)$ liegt. Wieder von ganz anderer Art ist eine Fragestellung, mit der sich Bohr 1925 in den Kopenhagener Meddelelser **7** befaßt. Da handelt es sich um ein System von unendlich vielen Kongruenzen

$$r_{n1} x_1 + r_{n2} x_2 + \ldots + r_{nq_n} x_{q_n} \equiv \vartheta_n \pmod 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo die Koeffizienten $r_{n\nu}$ rational sind und die Unbekannten x_ν reell sein sollen. Die Frage ist, wann die Menge Π_1 aller Punkte $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots)$ des unendlichdimensionalen Raumes, für die das unendliche System eine Lösung hat, identisch ist mit der trivialerweise eine Obermenge bildenden Menge Π_2, für die jedes endliche Teilsystem eine Lösung hat. Als notwendige und hinreichende Bedingung fand Bohr die „Ganzartigkeit" des Systems, deren Definition der Kürze halber hier unterdrückt werden mag, und er gab auch noch mehrere Kriterien für Ganzartigkeit an.

Diese Beispiele mögen genügen, um Bohrs Vielseitigkeit zu zeigen. Des weiteren hat er aber auch in den Jahren 1920 bis 23 zusammen mit Mollerup ein vierbändiges Werk über Analysis herausgegeben, das in Dänemark eine ähnliche Rolle spielte wie etwa Camille Jordans Cours d'analyse in Frankreich, indem es in den Händen aller Mathematikbeflissenen war und ihnen zeigte, was mathematische Strenge ist. Aber auch manches Neue ist darin enthalten, z. B. eine besonders handliche Einführung der Gammafunktion durch die Forderung der logarithmischen Konvexität, was in Deutschland erst 1931 durch die Monographie von Artin allgemein bekannt wurde.

Alles, was Bohr tat, tat er mit Leidenschaft und Meisterschaft. Als Erholung von geistiger Arbeit diente ihm in seiner Jugend das Fußballspiel, und auch da war er ein Meister von internationaler Klasse, der z. B. 1908 als Mitglied der dänischen Mannschaft an den olympischen Spielen in London teilnahm. Bis in seine letzten Lebensjahre blieb das Interesse am Fußball in ihm wach, und wenn er auch nicht mehr aktiv teilnehmen konnte, so verfolgte er doch stets die Spielberichte in Presse und Rundfunk mit lebhaftem Interesse und pflegte irgendwelche Elitekämpfe nach Möglichkeit selbst als Zuschauer zu erleben.

Die Wissenschaft war für Bohr selbstverständlich übernational. Er hatte Freunde und Mitarbeiter in allen Ländern, seine Arbeiten sind in vielen Sprachen geschrieben, ein großer Teil in Deutsch. Seit 1913 war er Mitglied der DMV, bis er sich 1934 genötigt sah, diese Beziehung zu lösen. Trotz der schweren Kränkung, die ihm damals von einigen wenigen Verblendeten widerfahren war und obwohl er während der deutschen Besatzungszeit für zwei Jahre nach Schweden flüchten mußte, wurde er bald nach dem Kriege wieder Mitglied der DMV. Den Kollegen, die in Not waren, suchte er zu helfen, wo er konnte: vor dem Kriege denjenigen, die Deutschland verlassen mußten, nach dem Kriege zunächst den Kollegen in Polen, dann aber während der Hungerjahre auch in Deutschland.

Die Fachgenossen, die Bohr persönlich kannten — und deren sind viele in vielen Ländern —, betrauern in ihm nicht nur einen Mathematiker von ungewöhnlichen Gaben, sondern auch einen edlen Menschen, voll von Herzensgüte und Nächstenliebe.