

# Internationale Monatsschrift für Wissenschaft Kunst und Technik

herausgegeben von Max Cornicelius, Berlin, Zimmerstr. 36

Bezugspreis bei sämtlichen Postanstalten in Deutschland vierteljährlich 3 Mark; bei direktem Bezuge durch Streifband in den Ländern des Weltpostverkehrs 4 Mark. Einzelnummern kosten 1 Mark.

6. Jahrgang, Nr. 10  
Juli 1912

Insertionspreis für die zweigespaltene Nonpareillezeile 50 Pf. — Inseratenannahme bei den Geschäftsstellen von August Scherl G. m. b. H. in Berlin und den größeren Städten Deutschlands u. der Schweiz

Für die Redaktion verantwortlich: Wilhelm Paszkowski, Berlin.

Erscheint jeden ersten Sonnabend im Monat. — Verlag von August Scherl in Berlin SW. 68, Zimmerstraße Nr. 36-41.

## Hermann Grassmann, ein Beitrag zur Psychologie des Mathematikers.

Von  
Paul Stäckel.

Der Anteil an einzelnen Persönlichkeiten, die aus dem Rahmen des Gewöhnlichen heraustreten, ist gegenwärtig lebhafter als jemals, und immer höher schwillt die Flut der Denkwürdigkeiten und Lebensbeschreibungen. Viele dieser Schriften fesseln den Leser durch den bunten Wechsel der Geschehnisse; aber auch die Lebensläufe von Männern der Kunst und der Wissenschaft, deren Tätigkeit sich in der Stille abspielte, finden Beifall und Verständnis. Die tiefere Wirkung solcher Veröffentlichungen liegt darin, daß eine Psychologie des genialen Menschen angebahnt wird, zu der bereits bedeutsame Ansätze vorliegen. Wertvolle Anregungen für die Psychologie des Mathematikers ergeben sich aus der kürzlich erschienenen Biographie von Hermann Grassmann, die wir den ausdauernden Bemühungen Friedrich Engels verdanken.\*)

Schon die Anfänge Grassmanns sind von besonderer Art. Bei hervorragenden Mathematikern pflegt die eigentümliche Begabung sehr früh in voller Stärke hervorzutreten. Um einige Beispiele

auffallender Frühreife zu geben, so hat Pascal mit 12 Jahren selbständig eine elementare Geometrie entwickelt und mit 18 Jahren sein berühmtes Werk über Kegelschnitte verfaßt. Clairaut las mit 12 Jahren eine mathematische Abhandlung vor der Pariser Akademie, deren Mitglied er mit 18 Jahren wurde, nachdem er ein bedeutendes Buch über Kurven doppelter Krümmung veröffentlicht hatte. Lagrange ist auf Grund seiner Abhandlungen zur höheren Analysis mit 19 Jahren Professor an der Artillerieschule zu Turin geworden, und Galois hat in demselben Alter seine bahnbrechenden Entdeckungen in der algebraischen Gruppentheorie gemacht. Diese Erscheinung ist nicht etwa auf die romanische Rasse beschränkt; sie zeigt sich ebenso deutlich bei dem Engländer Newton, dem Niedersachsen Gauß, dem Norweger Abel, dem Russen Tschebyscheff. Daß in so früher Jugend mathematische Leistungen hohen Ranges möglich sind, erklärt sich wohl aus dem Umfande, daß hier Erfahrung und Studium weniger in Betracht kommen als auf anderen Gebieten; die Tätigkeit des Mathematikers hat in dieser Beziehung eine

\*) Leipzig, B. G. Teubner, 1911.

unverkennbare Ähnlichkeit mit dem Schaffen des Künstlers.

Sehr selten sind die Fälle, in denen sich das mathematische Talent erst mit dem Ausgang der zwanziger Jahre oder noch später entfaltet. So hat Vandermonde mit 30 Jahren, veranlaßt durch seine Bekanntschaft mit Fontaine, angefangen, Mathematik zu treiben, und mit 36 Jahren seine erste Abhandlung veröffentlicht, ein Meisterwerk, das einen großen Fortschritt in der Lehre von den algebraischen Gleichungen herbeiführte. Sophus Lie hatte auf der Schule in allen Fächern gleichmäßig befriedigende Leistungen aufzuweisen. Auf der Universität befand er sich in peinlicher Ungewißheit, welchen Beruf er ergreifen sollte. Erst als er zufällig, 26 Jahre alt, die Schriften von Poncelet und Plücker in die Hand bekam, erkannte er plötzlich, welche Richtung er seinem Leben geben sollte. Auch Grassmann gehört zu diesen Spätlingen. In Aufzeichnungen über seine Jugend berichtet er, daß er in den ersten Schuljahren durchaus keine Begabung gezeigt habe; er sei geistiger Anstrengungen unfähig gewesen und im Auffassen mit dem Verstande und mit dem Gedächtnis hinter seinen Mitschülern zurückgeblieben. Im vierzehnten Lebensjahre sei ihm »gleichsam ein Licht über sein Schummerleben aufgegangen«, und er habe sich entschlossen, alle geistigen Kräfte anzuregen und zu wecken; wie weit bei dieser Umwandlung, die Grassmann vor allem dem Konfirmationsunterricht zuschreibt, physiologische oder pathologische Umstände wirksam gewesen sind, wird sich kaum mehr ermitteln lassen. Jedenfalls hat Grassmann seinen Entschluß mit der eisernen Beharrlichkeit durchgeführt, die für seine ganze Lebensführung bezeichnend ist; der Kampf muß für ihn um so schwerer

gewesen sein, als er für kein Fach des Gymnasialunterrichts eine besondere Vorliebe hatte, auch nicht für Mathematik und Physik, obwohl er in diesen Fächern einen Lehrer von ungewöhnlicher Tüchtigkeit hatte, der noch dazu sein Vater war.

Daß Grassmann im Herbst 1817 die Universität Berlin bezog, um Theologie zu studieren, erklärt sich jedenfalls daraus, daß schon seine beiden Großväter Pfarrer gewesen waren und auch sein Vater ursprünglich dem geistlichen Beruf angehört hatte. Mathematische und physikalische Vorlesungen hat er niemals gehört und erst am Ende seiner Studienzeit, als er sich auf die Prüfung für das höhere Lehramt vorbereitete, auf eigene Faust mathematische und physikalische Bücher vorgenommen, mit dem Erfolge, daß ihm Ende 1831 die Lehrbefähigung in der Mathematik bis zur Sekunda erteilt wurde. Die Beschäftigung mit der Mathematik scheint er auch nach der Prüfung fortgesetzt zu haben, denn in einem Briefe an Saint-Venant vom Jahre 1847 erklärt er ausdrücklich, die ersten grundlegenden Begriffe seiner Ausdehnungslehre und die Anfänge seines geometrischen Kalküls stammten aus dem Jahre 1832. Allein er hat diese Gedanken damals nicht weiter verfolgt und sie erst 1839 bei Gelegenheit seiner Prüfungsarbeit über Ebbe und Flut wieder aufgenommen, die ihm 1840 die volle Lehrbefähigung in Mathematik verschaffte. Erst jetzt, in seinem dreißigsten Jahre, hat er die ganze Fruchtbarkeit und Tragweite jener Gedanken erkannt und die Darstellung, Erweiterung und Anwendung seiner neuen Analyse zur Aufgabe seines Lebens gemacht. So ist in mehrjähriger angestrebter Arbeit die lineale Ausdehnungslehre entstanden, die 1844 erschien, als Grassmann 35 Jahre alt war. Die mathe-

matischen Schriften, die er während der nächsten 18 Jahre, bis zur zweiten Ausdehnungslehre (1862), folgen ließ, haben seiner ersten Veröffentlichung kaum nachgestanden; wie es gekommen ist, daß er sich dann von der Mathematik abwendete, darüber wird noch zu berichten sein.

Was der Fernstehende schlechtweg mathematische Begabung nennt, das läßt bei genauerer Betrachtung eine Fülle gröberer und feinerer Unterschiede erkennen. Man vergleiche etwa den genialen Geometer, vor dessen geistigem Auge die verwickeltsten räumlichen Gestalten in runder Klarheit stehen, mit dem neueren Axiomatiker, bei dem ausschließlich die logische Seite der Mathematik in Wirksamkeit tritt. An dieser Stelle kann nur auf einen Einteilungsgrund hingewiesen werden, der für die Beurteilung Grassmanns von entscheidender Wichtigkeit ist, auf die Stellung der Mathematiker zur Formel. Auf dem einen Flügel finden wir die Ideologen. Sie betonen, daß der Zweck der mathematischen Forschung keineswegs in der Gewinnung von Formeln bestehe. Diese seien vielmehr lediglich ein Mittel zum Zweck, zum Ausdruck der mathematischen Gedanken, und das Ziel der Forschung müsse darin gesucht werden, die Formeln durch allgemeinere Begriffsbildungen zu ersetzen, aus denen man im einzelnen Bedarfsfälle alles Nötige ohne grundsätzliche Schwierigkeiten entnehmen könne. Den andern Flügel bilden die Algorithmiker, die den Formeln eine selbständige Bedeutung zuerkennen; es genügt ihnen zum Beispiel nicht, daß mathematische Abhängigkeiten durch gewisse Eigenschaften eindeutig erklärt werden, sondern sie wollen deren formelhafte Darstellung sozusagen mit den Händen greifen. Sie sind erfüllt von der eigenartigen Schönheit und »Eleganz« dieser

Gebilde, denen sie eine geheimnisvolle schöpferische Kraft zuschreiben, und machen geltend, daß der Übergang von den allgemeinen Begriffsbildungen zur Anwendung auf den besonderen Fall sich in der Regel nicht so leicht abtun lasse, sondern eigene Untersuchungen verlange, bei denen die Macht der Formel zu ihrem Rechte komme.

Grassmann gehört zu den Mathematikern von durchaus ideologischer Artung. Seine ausgesprochene Absicht war, so äußern sich Engel und Study in ihrer Ausgabe der ersten Ausdehnungslehre, alle seine Begriffe womöglich so gleich in der allgemeinsten Form darzustellen, deren sie fähig sind; er suchte überall das Gemeinsame zusammenzufassen, die einfachen Gedanken hervorleuchten zu lassen, das Nebensächliche und Wechselnde in den Hintergrund zu drängen. Endlich sollte das ganze Gebäude von Analysis und Geometrie unabhängig sein; nur zur Erläuterung und Veranschaulichung erlaubte er sich die Geometrie heranzuziehen.

Dieselbe Vorliebe für »begriffliche Beweisführungen« — der Ausdruck ist von Grassmann erdacht worden — findet sich auch bei Sophus Lie, dessen Genie sich auf diesen Gipfeln der Abstraktion am wohlsten fühlt und hier seine ganze Kraft entfaltet. Man wird nicht irren, wenn man vermutet, daß dieser beiden Forschern gemeinsame Zug mit ihrer späten Reife zusammenhängt; die Jugend reizt das einzelne Problem, das dem Sturmangriff des zu seiner Lösung Berufenen erliegt, die großen Synthesen werden durch lange vorbereitende Arbeit erobert, wenn auch das Endergebnis häufig wie eine Erleuchtung ins Bewußtsein tritt.

Die ideologische Fassung der linealen Ausdehnungslehre, in der Grassmann die gegenseitigen Beziehungen abstrakter

Gebilde in abstrakten Gebieten mit Hilfe abstrakter Verknüpfungsgesetze untersucht, hat es hauptsächlich verschuldet, daß dem tiefen und inhaltreichen Werke lange Zeit hindurch die gebührende Anerkennung vorenthalten wurde. Als aber auch seine späteren Arbeiten, die dem Verständnis der Zeitgenossen näher lagen, unbeachtet blieben und ihm die akademische Professur nicht zuteil wurde, die er in der Vorrede zur ersten Ausdehnungslehre als das Ziel seiner Wünsche und Bestrebungen bezeichnet hatte, da hat Grassmann schweren Herzens auf die mathematische Forschung verzichtet und ist im reifen Mannesalter, ein angehender Fünfziger, auf ein anderes Gebiet wissenschaftlicher Tätigkeit übergegangen, auf die indogermanische Sprachforschung. Wie Engel ausführt, war die vergleichende Sprachwissenschaft damals noch verhältnismäßig jung. Ihre Vertreter waren noch dabei, die Fülle des neu erschlossenen und immer wachsenden Sprachgutes durchzuarbeiten, und jeder Mitarbeiter war willkommen, der mit Ernst und Scharfsinn versuchte, die verwirrende Mannigfaltigkeit der Erscheinungen zu ordnen und die vielen Dunkelheiten zu erhellen. Deshalb wurden Grassmanns sprachwissenschaftliche Arbeiten gelesen und — das konnte nicht ausbleiben — geschätzt.

Grassmanns Doppelbegabung ist ungewöhnlich; es fehlt jedoch nicht an Seitenstücken. Gauß, der erst mit elf Jahren auf das Braunschweiger Gymnasium kam, lernte die alten Sprachen so rasch, daß er nach zwei Jahren in die Prima versetzt wurde. In Göttingen studierte er zunächst Philologie und Mathematik; erst im März 1796, nachdem ihm der große Wurf in der Lehre von der Kreisteilung geglückt war, entschied er sich für die Urania. Später

hat er jedoch neben seinen großen mathematischen, astronomischen, geodätischen, physikalischen Arbeiten Zeit gefunden, sich fast alle neueren europäischen Sprachen anzueignen. In seinem 62. Lebensjahre glaubte er, wie Sartorius v. Waltershausen erzählt, auf ein Mittel Bedacht nehmen zu müssen, um seinen Geist frisch zu erhalten, und wählte dazu die Beschäftigung mit der russischen Sprache, die er ohne jede Hilfe in zwei Jahren so in die Gewalt bekam, daß er alle Bücher in Prosa und Poesie mit Geläufigkeit lesen und sogar seinen Briefwechsel mit St. Petersburg mitunter in russischer Sprache besorgen konnte. Andere Beispiele sind Jacobi, der Schüler Böckhs, und Schläfli, ein vortrefflicher Kenner der semitischen Sprachen. An der Spitze steht ohne Zweifel Grassmann. Sein Wörterbuch zum Rigveda und die anschließende Übersetzung (1873—1877) waren für seine Zeit eine hervorragende Leistung, und mit seinem Aspiratengesetz (veröffentlicht 1863) hat er sich für alle Zeiten ein Denkmal in der Geschichte der Sprachwissenschaft gesetzt.

Besteht ein innerer Zusammenhang zwischen den beiden scheinbar so verschiedenen Begabungen für Sprachen und Mathematik? Man könnte dagegen einwenden, daß es nicht wenige ausgezeichnete Vertreter einer der beiden Richtungen gibt, denen der Sinn für die andere völlig abgeht. Zur Erklärung scheint jedoch in den allermeisten Fällen das Gesetz auszureichen, wonach Organe, die nicht geübt werden, verkümmern. Für eine gewisse Verwandtschaft spricht jedenfalls der Umstand, daß bei dem mathematischen Schaffen der Phantasie und dem Unbewußten eine viel größere Bedeutung zukommt, als man früher anzunehmen geneigt war. Eine lesenswerte Studie von Toulouse über den

Mathematiker Henri Poincaré, über die kürzlich Seilliére in dieser Zeitschrift berichtet hat, zeigt aufs deutlichste, daß rein logisches Denken zwar zum Beweise, aber nicht zur Entdeckung mathematischer Wahrheiten zu führen pflegt. Kronecker hat diese Überzeugung, die er mit Sylvester teilte, in dem Distichon ausgesprochen:

Nonne mathematici veri natiq̄ue poetæ?  
Sunt; sed quod fingunt hosce probare decet.

Die Mathematik steht der Kunst nahe, und von den Künsten steht ihr die Musik am nächsten. Das kommt schon zum Ausdruck in der Vorliebe, mit der die Mathematiker Vergleichen aus der Musik benutzen. Es möge genügen, aus Boltzmanns Gedächtnisrede auf Kirchhoff eine bezeichnende Stelle herzusetzen. »Wie der Musiker bei den ersten Takten Mozart, Beethoven, Schubert erkennt, so würde der Mathematiker nach wenigen Seiten einen Cauchy, Gauß, Jacobi, Helmholtz unterscheiden. Höchste äußere Eleganz, mitunter ein etwas schwaches Knochengerüst der Schlüsse charakterisiert die Franzosen, die größte dramatische Wucht die Engländer, vor allem Maxwell. Wer kennt nicht seine dynamische Gastheorie? Zuerst entwickeln sich majestätisch die Variationen der Geschwindigkeiten, dann setzen von der einen Seite die Zustandsgleichungen, von der anderen die Gleichungen der Zentralbewegung ein. Immer höher wogt das Chaos der Formeln. Plötzlich ertönen vier Worte:  $put\ n = 5$ . Der böse Dämon  $V$  verschwindet, wie in der Musik eine wilde, bisher alles unterwühlende Figur der Bässe plötzlich verstummt; mit einem Zauberschlage ordnet sich, was früher unbezwingbar erschien.«

Häufig sind die Mathematiker auch ausübende und theoretische Musiker. Nachdem Chamberlain in seinen Grundlagen des neunzehnten Jahrhunderts dar-

gelegt hat, warum er Euklids Elemente der Geometrie für ein Kunstwerk ersten Ranges hält, fährt er fort: »Jedenfalls darf ich es als keinen Zufall erachten, wenn der unvergleichliche Geometer zugleich ein begeisterter Tonkünstler war, dessen Elemente der Musik, wenn wir sie in der ursprünglichen Gestalt besäßen, vielleicht ein würdiges Gegenstück zu seinen Elementen der Geometrie bilden würden.« Von neueren Mathematikern seien nur Euler und Vandermonde angeführt, die beide Schriften über Harmonielehre verfaßt haben. Grassmann schließt sich ihnen an. Sehr selten verging, wie Engel berichtet, ein Abend, ohne daß in seinem Hause musiziert wurde. Grassmann selbst besaß einen schönen Tenor, und auch seine Kinder waren durchweg stimmbegabt; gar oft erklangen die Quartette von Reichardt, Oelschläger, Löwe, Mendelssohn und anderen. Auch hatte er 1861 bis 1872 pommersche Volkslieder mit den Melodien gesammelt und für den Gebrauch der Familie dreistimmig gesetzt. Außerdem spielte er Klavier, besonders die Kompositionen von Bach und Beethoven; zu seiner Erholung erging er sich auch in reinen Phantasien auf dem Klavier. Ein Beweis für die ungewöhnliche Feinheit seines Gehörs sind seine Untersuchungen über die Bildung der Vokale aus Grundtönen und deren Obertönen.

»Er ist ein Mathematiker, und also hartnäckig«, sagt Goethe in den Wanderjahren, um den Freund Makariens zu beschreiben. Er dachte dabei wohl an den Jenenser Pedanten, der ihm die Mathematik verleidet hatte. Auf Grassmann wird man das Wort anwenden können, das Goethe in seinem Epilog zur Glocke von Schiller sagt:

»Und hinter ihm in wesenlosem Scheine  
Lag, was uns alle bändigt, das Gemeine.«