

Philipp Furtwängler †.

Von A. HUBER in Wien.

Mit einem Bildnis.

Als wir im vergangenen Jahr Furtwängler die Glückwünsche der philosophischen Fakultät und des mathematischen Instituts zu



seinem siebenzigsten Geburtstage überbrachten, da ahnten wir nicht, daß er knapp ein Jahr später nicht mehr unter den Lebenden weilen würde. Schon gegen den Herbst verschlimmerte sich sein Befinden derartig, daß er kaum mehr das Bett verlassen konnte, und als sich im Jänner der erste Schlaganfall einstellte, da mußte man wohl auf das Äußerste gefaßt sein. Am Morgen des 19. Mai 1940 erlitt er wieder einen Schlaganfall, und wenige Stunden hernach

setzte ein sanfter Tod seinem an Arbeit und Leid so reichen Leben ein Ende.

Furtwänglers Wiege stand in dem Städtchen Elze im Regierungsbezirk Hildesheim, wo er am 21. April 1869 als erstes Kind des Orgelbauers Wilhelm Furtwängler und dessen Ehegattin Mathilde, geb. Sander, das Licht der Welt erblickt hat. Als er nach seiner Konfirmation von 1883 an das Andreaneum zu Hildesheim besuchte, hatte er bereits beide Eltern verloren und fand als Hauslehrer eine freund-

liche Aufnahme in der Familie eines Mitschülers. Zu Ostern 1889 legte er die Reifeprüfung ab und begann seine Studien an der Universität Göttingen, wo er bis Ostern 1894 Vorlesungen und Übungen über Mathematik und Physik besuchte, besonders bei Burkhardt, Fricke, Hölder, Klein, Schönflies, Riecke, Schering und Voigt. Von seinen Lehrern dürfte wohl Klein den nachhaltigsten Einfluß auf seine wissenschaftliche Entwicklung ausgeübt haben, und wir finden ihn daher auch unter den Schülern Kleins, die sich durch die Ausarbeitung der in hektographischer Form erschienenen Vorlesungen des Meisters ein großes Verdienst darum erworben haben, daß die ganze Welt an dem so überaus fruchtbaren Lehr- und Forschungsbetrieb Göttingens teilnehmen konnte.

Bereits vor Ablegung der Prüfung für das höhere Lehramt ging er auf ein Jahr als zweiter Assistent an das physikalische Institut der Technischen Hochschule in Darmstadt und absolvierte sodann sein Seminarjahr am Lyzeum I in Hannover, nachdem er noch am 1. März 1895 sein Dokorexamen abgelegt hatte. Während der Ableistung seines Freiwilligenjahres in Göttingen hörte er wohl auch den zweiten Teil der von Klein 1895/96 gehaltenen Vorlesung über ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, den er gemeinsam mit A. Sommerfeld ausgearbeitet hat.

Mit der Übernahme einer Assistentenstelle am geodätischen Institut in Potsdam im Jahre 1897 begann Furtwängler seine wissenschaftliche Laufbahn, allerdings auf einem Gebiete, das ziemlich weit abseits lag von jenem, dem er später den größten Teil seiner Lebensarbeit widmen sollte. Wie sehr jedoch auch auf diesem Gebiete seine außergewöhnliche Begabung und unermüdliche Arbeitskraft von berufener Seite geschätzt wurde, zeigte sich durch seine Bestellung an die Landwirtschaftliche Akademie in Bonn im Jahre 1903, wohin er nach einer von 1907 bis 1910 an der Technischen Hochschule in Aachen ausgeübten Lehrtätigkeit wieder zurückkehrte. Zwei Jahre später jedoch folgte er einem Ruf an die Universität Wien als Nachfolger von Mertens, doch hinderten ihn der Ausbruch des Weltkrieges und ein bald danach sich einstellendes Leiden an der Ausführung so mancher Pläne, die er für den Ausbau des Wiener mathematischen Institutes ins Auge gefaßt hatte. Im Wintersemester 1937/38 erlaubte ihm sein Befinden nicht mehr, seine Vorlesungen aufzunehmen, und im Oktober 1938 wurde er in den dauernden Ruhestand versetzt.

Die Anerkennung der wissenschaftlichen Leistungen Furtwänglers fand ihren Ausdruck in seiner Wahl zum Mitglied angesehenen gelehrter Gesellschaften. Seit 1927 war er wirkliches Mitglied der Akademie der

Wissenschaften in Wien und seit 1931 korrespondierendes Mitglied der preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. Auch die Kaiserliche Leopold-Carolin.-Akademie der Naturforscher in Halle wählte ihn zum Mitglied, und für das Jahr 1930 wurde ihm die Ernst-Abbe-Gedächtnismedaille verliehen.

Im Jahre 1903 vermählte sich Furtwängler mit Ella Buchwald, die ihm aber einige Jahre nach der Geburt einer Tochter entrissen wurde. Erst im Jahre 1929 schloß er eine zweite Ehe mit Emilie Schön, die ihm durch ihre unermüdliche Hilfsbereitschaft und aufopfernde Pflege viel geholfen hat, sein in der letzten Zeit immer schwerer gewordenen Leiden zu ertragen.

Furtwängler hat sich trotz seines selbst für einen Norddeutschen ungewöhnlich stark zurückhaltenden Wesens die Zuneigung aller erworben, die mit ihm Fühlung nehmen konnten. Obwohl er niemals irgendwie demonstrierte, war er uns ostmärkischen Studenten mit jedem Worte, das er zu uns sprach, stets eine lebendige Mahnung an die völkische und kulturelle Verbundenheit unserer Heimat mit dem großen deutschen Vaterland. Seine vorbildliche Pflichterfüllung nötigte uns nicht minder hohe Wertschätzung ab als sein stets freundliches Entgegenkommen, das er selbst in jenen Jahren seinen Hörern gegenüber zeigte, als deren 300–400 in seinem Hörsaal zusammengedrängt waren. Furtwänglers Interessen umspannten ein wesentlich weiteres Gebiet, als man vielleicht nach seinen wissenschaftlichen Arbeiten vermuten würde. Daß er selber von einseitigem Spezialistentum keine hohe Meinung hatte, konnte ich einmal aus der feinen ironischen Art erkennen, in der er mir gelegentlich von einer Äußerung erzählte, die ein ihn besuchender sehr bekannter Zahlentheoretiker getan hatte. Es war so um die Zeit, als der Rundfunk anfang, die große Sensation zu werden. Furtwängler interessierte sich lebhaft dafür, und auf seinem Tisch standen damals stets einige derartige Geräte. Seine Absicht jedoch, seinem Besuch die Wunder des Radios zu enthüllen, scheiterte an dessen kategorischer Erklärung: „Dafür fehlt der Existenzbeweis, und deswegen interessiert mich diese Sache ganz und gar nicht.“ In seinen letzten Lebensjahren galt Furtwänglers Interesse aufs stärkste verschiedenen Fragen der Strömungslehre, und seine Bücherei enthielt auch einen großen Teil der neuesten Literatur dieses Gebietes. In seiner Liebe und seinem feinsinnigen Verständnis für klassische Musik dürfte sich wohl ein väterliches Erbe geäußert haben, und so manche frohe Stunde bereitete ihm ein musikalisches Kränzchen, an dem er als Pianist teilnahm. Er war übrigens ein entfernter Vetter des gefeierten Dirigenten Staatsrat Wilhelm Furtwängler.

Überaus fruchtbar war Furtwänglers Lehrtätigkeit an der Universität Wien. Neben seinen periodisch wiederkehrenden, je zwei Semester umfassenden Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Algebra und Zahlentheorie verstand er es, in überaus reizvoller Weise verschiedene Kapitel der Elementarmathematik zu behandeln, und als Folge seiner Beschäftigung mit dem Radio las er auch einmal über lineare Differentialgleichungen. In dem regelmäßig zwei Wochenstunden gehaltenen Seminar, in dem er selber meist über ausgewählte Kapitel der Algebra und Zahlentheorie vortrug, gab er die Anregung zu so mancher der unter seiner Leitung entstandenen etwa 60 Doktorarbeiten.

Furtwänglers Name ist mit seinen zahlentheoretischen Untersuchungen so eng verbunden, daß darüber seine Arbeiten auf dem Gebiete der höheren Geodäsie leicht außer acht gelassen werden könnten. Da sie auch in die früheste Zeit seines Schaffens fallen, so mögen sie auch hier an erster Stelle besprochen werden. Sie stehen in engstem Zusammenhang mit der für alle derartigen Messungen fundamentalen Bestimmung der absoluten Schwerkraft für Potsdam, die er nach der von Helmholtz und Schumann verbesserten Theorie gemeinsam mit dem Physiker F. Kühnlen durchgeföhrt hat (4, 12, 15). Dabei gelang es ihm auch, nach Aufdeckung eines Lorenzoni unterlaufenen Verschens, die von diesem für Padua bestimmte Schwerkraft mit der von v. Sterneck in Wien gemessenen in Übereinstimmung zu bringen, wodurch eine Wiederholung überaus mühsamer Beobachtungen unterbleiben konnte. Durch seine Untersuchungen über die Schwingungen von zwei Pendeln auf gemeinsamer Unterlage hat Furtwängler ein Problem ganz wesentlich gefördert, auf das bereits Huygens gestoßen war. Eine in Aussicht gestellte ausführlichere Veröffentlichung ist leider unterblieben. Auf den von ihm geschaffenen Grundlagen wurden erst in neuester Zeit Methoden ausgearbeitet, die eine Bestimmung der Schwerkraft vom fahrenden Unterseeboot aus ermöglichen. Eine Frucht seiner Tätigkeit am geodätischen Institut in Potsdam sind auch seine Beiträge zum IV. und VI. Band der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften sowie zum Handwörterbuch der Naturwissenschaften und zu den IMUK.-Berichten (9, 17, 23, 24). Er galt damals schon so sehr als Geodät, daß er von den Herausgebern der Enzyklopädie gemeinsam mit Wiechert zum Redakteur des Geodäsiebandes bestellt wurde.

Obwohl Furtwänglers Arbeitskraft in Potsdam sicherlich in hohem Maße in Anspruch genommen war, fand er doch noch Zeit, seine in Göttingen begonnenen zahlentheoretischen Untersuchungen

fortzusetzen, deren Ergebnisse seinen Namen für immer mit diesem Gebiete der Mathematik aufs ehrenvollste verbinden werden. Bereits in seiner ersten Veröffentlichung (1), die man vielleicht schon als Vorläufer einer seiner wertvollsten Abhandlungen betrachten kann, kündigt sich seine Vorliebe für zahlentheoretische Spekulationen an. Indem er dort einem Ideal eine zerlegbare primitive Form zuordnet, so daß der Multiplikation der Ideale die Komposition der zugehörigen Formen entspricht, zeigt er, daß es für jedes Ideal α einen Exponenten k gibt, so daß α^k ein Hauptideal wird, und entwickelt von da aus die Hauptsätze der Idealtheorie. Im ersten Teil seiner Doktorarbeit (2) bestimmt er zunächst die Automorphismen von ternären, zerlegbaren kubischen Formen, um sich dann der Untersuchung ihrer Äquivalenz und der Darstellbarkeit gegebener Zahlen durch gegebene Formen zuzuwenden. Die durch Heranziehung von Punktgittern durchgeführte geometrische Veranschaulichung der von Hermite herführenden „réduction continue“ deutet schon auf die von seinem Lehrer F. Klein empfangene Anregung zu dieser Arbeit hin. Im zweiten Teil werden Formenkomplexe betrachtet und der Zusammenhang der Komposition der Formen mit der Multiplikation der Ideale dargestellt. Obwohl Furtwängler später in seinen Vorlesungen gern die geometrische Deutung der Idealtheorie durch Punktgitter gepflegt hat, hat er erst nach Jahren ihre Verallgemeinerung auf n -dimensionale Räume veröffentlicht (33). Dabei treten Schwierigkeiten auf, die sich bei quadratischen Körpern noch nicht einstellen können und die eine feineren Einteilung der Formen notwendig machen.

Das Kernstück von Furtwänglers wissenschaftlicher Arbeit bilden jedoch seine erfolgreichen Untersuchungen über die beiden von Hilbert aufgeworfenen Probleme, mit denen er sich durch dreißig Jahre lebhaft beschäftigt hat, nämlich den Beweis der Reziprozitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern und der Existenz des Klassenkörpers. Die enge Verbundenheit dieser beiden Probleme tritt schon äußerlich dadurch in Erscheinung, daß sich die betreffenden Veröffentlichungen Furtwänglers in ihrer historischen Reihenfolge bald auf das eine, bald auf das andere beziehen, doch will ich sie zur Erzielung einer größeren Übersichtlichkeit getrennt nach beiden Gegenständen zusammenstellen.

In der ersten (3), von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen preisgekrönten Arbeit wird nach den von Hilbert für den relativquadratischen Körper entwickelten Methoden das allgemeine Reziprozitätsgesetz unter der Annahme hergeleitet, daß die Klassenzahl h des Grundkörpers durch den ungeraden Primzahl-

exponenten l teilbar ist. Eine kurz darauf erschienene Abhandlung (7) bringt nach einer zusammenfassenden Darstellung der bisher gewonnenen Ergebnisse als wesentlichen Fortschritt die Ausdehnung des Reziprozitätsgesetzes auf ein beliebiges und ein primäres Primideal. In den drei nach sechs Jahren in kurzen Abständen aufeinanderfolgenden Veröffentlichungen (16, 22, 26) werden diese Untersuchungen zum Abschluß gebracht, wobei von der inzwischen entwickelten Theorie des Klassenkörpers ausgiebig Gebrauch gemacht wird. Es gelingt, die verschiedenen Arten von Nichtresten zu unterscheiden, und das früher zum Beweis benutzte Eisensteinsche Gesetz ergibt sich nun als Folge. Die von Hilbert und Kummer angegebenen Reziprozitätsgesetze können nun in einer allgemeineren Form ausgesprochen werden, in der sowohl die allgemeinen Reziprozitätsformeln als auch die Ergänzungssätze enthalten sind. Schließlich wird noch der Fall $l = 2$ erledigt, wenn der Grundkörper reell ist, oder unter seinen Konjugierten reelle vorhanden sind, womit das von Hilbert gesteckte Ziel erreicht ist. Mit seinen Untersuchungen (38, 39) über l^n -te Potenzreste geht aber Furtwängler über dieses Ziel noch hinaus, indem er für $n = 2$ die Existenz einer Reziprozitätsformel nach einer auf beliebiges n anwendbaren Methode beweist, wenn wenigstens eine von ihnen zweifach primär ist und der Körper die l^2 -ten Einheitswurzeln enthält. Kurz hernach wurden jedoch diese Dinge von Artin mit anderen Methoden allgemein erledigt.

Den Beweis der Existenz des Klassenkörpers erbringt Furtwängler dadurch, daß er ihn unter allmählicher Befreiung von einschränkenden Voraussetzungen tatsächlich konstruiert. Wenn der Grundkörper eine l -te Einheitswurzel enthält, seine Klassenzahl von der Form $q \cdot l$ ist, wobei $(q, l) = 1$, und die q -ten Potenzen aller Klassen eine zyklische Gruppe l^n -ten Grades bilden, wird fast durch die gleichen Betrachtungen, die in (3) benutzt wurden, die Existenz eines unverzweigten relativ-zyklischen Oberkörpers vom Relativgrad l^n nachgewiesen. Kurz darauf aber gelingt in (6) und (8) die Beseitigung der genannten Voraussetzungen und durch Anwendung eines verschärften Äquivalenzbegriffes auch die Vervollständigung für den Fall $l = 2$. Durch eine besondere Betrachtung der mit der Theorie der komplexen Multiplikation zusammenhängenden imaginär-quadratischen Grundkörper kommt Furtwängler zu allgemeineren Ergebnissen, als Fueter hierüber auf einem anderen Wege gefunden hatte. Die auf Wunsch der Redaktion der Mathematischen Annalen gelieferte zusammenfassende Darstellung (10) enthält aber auch verschiedene wertvolle Erweiterungen und bringt u. a. den an Untersuchungen von H. Weber

anschließenden Beweis des sog. Satzes von der arithmetischen Progression, daß nämlich in jeder Idealklasse unendlich viele Primideale vorhanden sind. Als eine Ergänzung hierzu kann man den in (21) mitgeteilten schönen Satz ansehen: „Ist h die Klassenzahl eines beliebigen algebraischen Körpers k , $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k und $\mathfrak{p}^n$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in die Hauptklasse von k fällt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ im Klassenkörper von k genau in h/n verschiedene Primideale.“

Nun war auch die Umkehrung der Frage nach der Existenz des Klassenkörpers naheliegend, nämlich ob auch jeder relativ abelsche unverzweigte Körper im Klassenkörper enthalten ist. In (11) bejaht Furtwängler diese Frage nur unter verschiedenen, besonders im Falle $l = 2$ sehr tief einschneidenden Einschränkungen, aber in (13) macht er sich von der Voraussetzung, daß die Klassenzahl des Grundkörpers durch keine Potenz von 2 teilbar sein soll, frei und stellt unter Benutzung eines verschärften Äquivalenzbegriffes den Satz auf: „Ist K ein unverzweigter abelscher Körper in bezug auf k , dann ist K im Klassenkörper von k enthalten.“

In einer Reihe weiterer Abhandlungen hat sich Furtwängler mit verschiedenen Anwendungen der von ihm gefundenen Sätze über den Klassenkörper beschäftigt. So ergibt sich in (14) der folgende bereits von Kummer in dem Falle $n = 1$ ausgesprochene, aber nicht stichhaltig bewiesene Satz: „Sind k und K zwei Unterkörper des Körpers der m -ten Einheitswurzeln ($m = p^n$) und ist k in K enthalten, dann ist die Klassenzahl von k ein Teiler der Klassenzahl von K .“ In (20) gelingt es, als Anwendung der Theorie der relativ zyklischen Körper vom Primzahlgrad l , die folgende von H. Weber für den Fall $l = 2$ gemachte Aussage allgemein zu beweisen: „Die Klassenzahl des Körpers der l^n -ten Einheitswurzeln ist stets dann und nur dann durch l teilbar, wenn die Klassenzahl des Körpers der l -ten Einheitswurzeln durch l teilbar ist.“ Von den beiden größeren Aufsätzen (30) und (31) bringt der erste den vollständigen Aufbau der Ringklassenkörper vom Relativgrad l für imaginär-quadratische Körper zunächst unter der Einschränkung, daß die Klassenzahl des Grundkörpers zu l prim und l kein Teiler der Relativdiskriminante ist. Im zweiten wird nach Befreiung von dieser Einschränkung der allgemeine Fall erledigt, ferner werden die Existenz der von der komplexen Multiplikation gelieferten Klassenkörper rein arithmetisch hergeleitet und der Vollständigkeitsbeweis erbracht.

Die wohl bedeutendste Leistung Furtwänglers aber gehört dem ebenfalls auf Hilbert zurückgehenden Problem des Hauptidealsatzes an, der folgendes besagt: „Im größten unverzweigten oder

absoluten Klassenkörper K zu einem algebraischen Zahlkörper k werden alle Ideale von k zu Hauptidealen.“ Er hatte bereits in (27) die Richtigkeit dieses Satzes, der bis dahin nur für eine zyklische Klassengruppe bewiesen war, auch für den Fall nachgewiesen, daß die Klassengruppe zwei Basisklassen besitzt und die Klassenzahl jeden Primfaktor nur zweimal enthält, und verschiedene Beispiele und interessante Sätze über Körper angegeben, deren Klassenzahl durch 4 teilbar ist. Der allgemeine Satz jedoch hat auch noch nach den Untersuchungen von Takagi und Artin allen Beweisversuchen einen derartigen Widerstand entgegengesetzt, daß verschiedentlich schon Zweifel an seiner Allgemeingültigkeit sich zu erheben anfangen, da im nicht-zyklischen Fall die Verhältnisse so verwickelt werden, daß keine Möglichkeit mehr zu bestehen schien, auch hier mit rein zahlentheoretischen Mitteln durchzukommen. Daß hier tatsächlich mit der Theorie der relativ abelschen Körper nicht mehr weiter zu kommen war, zeigte sich, nachdem es Artin mittels seines Reziprozitätsgesetzes gelungen war, die Idealklassen von K auf die Substitutionen der Galoisschen Relativgruppe des zweiten absoluten Klassenkörpers K' zu k abzubilden, woraus eben hervorging, daß K' nur noch metabelsch über k ist. Artin hat auch erkannt, daß der Nachweis der allgemeinen Gültigkeit des Hauptidealsatzes nun abhing von dem Beweis einer gewissen Relation über derartige zweistufige Gruppen, und diesen Beweis hat Furtwängler nach mühevollen Rechnungen in (43) erbracht. Wenig später zeigte er in (44), daß sich die Basis gewisser Klassen Gruppen stets so wählen läßt, daß jede Basisklasse bereits in einem relativ quadratischen Körper in die Hauptklasse übergeht.

Auch zu anderen, von den bisher besprochenen weit abseits liegenden Problemen der Zahlentheorie und der Algebra hat Furtwängler wertvolle Beiträge geliefert. Von den Aufsätzen (18) und (25) über den letzten Satz von Fermat enthält der zweite das folgende schöne Ergebnis: „Ist $x_1^l + x_2^l + x_3^l = 0$, und r ein Faktor von x_i , wobei $(x_i, l) = 1$, oder von $(x_i \pm x_k)$, wobei $(x_i \pm x_k, l) = 1$, dann muß $r^{l-1} \equiv 1 (l^2)$. Aus diesem mittels des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes abgeleiteten Kriterium ergeben sich die von Legendre, Wieferich und Mirimanoff als einfache Sonderfälle.

Von den algebraischen Arbeiten Furtwänglers ist (35) der Theorie des Lagrangeschen Funktionenkörpers gewidmet. Sie enthält den Nachweis der Existenz und zum Teile auch die explizite Darstellung von Minimalbasen für Funktionenkörper, die zu den transitiven auflösbaren Gruppen der Grade 3, 5, 7 und 11 gehören. In (34) erfährt das nur teilweise gelöste Umkehrproblem, also die Frage, ob es algebraische

Gleichungen mit beliebig vorgegebener Galoisscher Gruppe gibt, eine bemerkenswerte Förderung. Nach Aufstellung eines Kriteriums für die Irreduzibilität einer algebraischen Gleichung, welches das Schoenemann-Eisensteinsche als Sonderfall enthält, und eines Kriteriums für die Primitivität zeigt Furtwängler, daß die Galoissche Gruppe der Gleichungen

$$x_1(x - 2b_1)(x - 2b_2) \cdots (x - 2b_{n-1}) - (-1)^n(2x + 4) = 0 \quad (n > 4),$$

wo die ganzen Zahlen $b_i > 1$ und voneinander verschieden sind, die symmetrische Permutationsgruppe ist. Dazu wird die Erweiterung eines von H. Weber gefundenen Satzes benützt, daß eine primitive irreduzible Gleichung, die genau zwei komplexe Wurzeln hat, stets affektfrei ist. Über die „Dichte“ affektfreier Gleichungen kommt Furtwängler in (42) zu folgendem Ergebnis: „Deutet man in der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

die in einem Körper k liegenden a_i als Koordinaten in einem R_n , bzw. in einem R_{2n} , wenn k komplex ist, so liegen die in k affektfreien Gleichungen überall dicht.“

In den Kreis der von Minkowski aufgeworfenen Fragen der geometrischen Zahlentheorie gehört der Gegenstand der Abhandlung (32), in der das von F. Klein zur geometrischen Deutung der Kettenbruchentwicklung angegebene „Umrißpolygon“ ins Räumliche übertragen wird, nachdem eine beim Minkowskischen Verfahren der „Nachbarbildung“ auftretende Schwierigkeit beseitigt war.

Andere geometrische Vorstellungen finden sich auch in den Arbeiten (37) und (41) über die simultane Approximation von Irrationalzahlen von der Gestalt

$$\left| \alpha_i - \frac{x_i}{x_n} \right| < k \cdot x_n^{-\frac{n}{n-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

worüber Furtwängler den folgenden Satz beweist: „Ist D die absolut kleinste Diskriminante der reellen Körper n -ten Grades und

$$K < |D|^{-\frac{1}{2(n-1)}},$$

dann gibt es $n-1$ reelle, rational-unabhängige Irrationalzahlen α_i , so daß diese Ungleichungen nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ haben. Nachdem so Furtwängler die Bedeutung der Diskriminante für die Lösbarkeit dieser Aufgabe erkannt hatte, entwickelt er in der zweiten Arbeit nach Vervollständigung seines früheren Beweises einen Algorithmus zur simultanen Approximation

von zwei Irrationalitäten. In (28) gibt Furtwängler eine Vereinfachung des von Minkowski stammenden Kriteriums für den algebraischen Charakter einer Irrationalität. Er betrachtet dazu die Minima ξ_i , die das Polynom für ein festes α :

$$\xi = x_1 + x_2 \cdot \alpha + x_3 \alpha^2 + \dots + x_n \alpha^{n-1}$$

für wachsendes t annimmt, wenn $|x_i| \leq t$. Nun werden alle ξ_i aus dieser Reihe der Minima gestrichen, die von $n-1$ vorhergehenden linear abhängig sind, wobei aber gerade der Nachweis, daß es unter einer festen Anzahl aufeinanderfolgender ξ_i n linear unabhängige gibt, am schwersten zu erbringen war. Die nach dieser Ausmerzung übrig bleibenden ξ_i heißen Hauptminima und werden mit φ_i bezeichnet. Damit läßt sich nun das folgende Kriterium aufstellen: „Die Irrationalität α ist dann und nur dann algebraisch vom n -ten Grad, wenn die Reihe der Hauptminima nicht abbricht und unter den φ_{i+1}/φ_i nur endlich viele voneinander verschieden sind.“

In seinen letzten Lebensjahren hat sich Furtwängler mit Fragen beschäftigt, die mit der Minkowskischen Vermutung über Grenzgitter zusammenhängen, doch hat er darüber nur einige seiner Ergebnisse in der Arbeit (47) veröffentlicht. Unter einem Gitter von konstanter Dichte versteht er dabei ein solches, von dem jeder Einheitswürfel g Punkte enthält. Von einem solchen Gitter zeigt er für $n = 2, 3$, daß sich seine definierenden Linearformen ξ_i in einer gewissen Reihenfolge ganzzahlig unimodular in die Gestalt transformieren lassen:

$$\xi_{i1} = \frac{z_1}{g_1}; \quad \xi_{i2} = c_{21} z_1 + \frac{z_2}{g_2}; \quad \dots \quad \xi_{in} = c_{n1} z_1 + c_{n2} z_2 + \dots + c_{n,n-1} z_{n-1} + \frac{z_n}{g_n};$$

wobei die g_i natürliche Zahlen sind und $g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n = g$. Daraus ergibt sich dann die Minkowskische Vermutung, wenn $g = 1$, da ja Grenzgitter identisch sind mit Gittern mit der konstanten Dichte 1.

Die Vielschichtigkeit, die Furtwängler durch seine originellen Leistungen auf dem weiten Gebiete der Algebra und der Zahlentheorie bewiesen hat, ließen ihn auch als den für die Abfassung des wichtigen Artikels „Theorie der algebraischen Zahlkörper“ für die neue Ausgabe der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften berufenen Gelehrten erscheinen. Er löste zwar noch sein Versprechen ein, aber sein Auge sollte diese letzte Frucht seiner trotz Alter und Leiden ungebrochenen Arbeitskraft in ihrer vollendeten Form nicht mehr erblicken.

Das Beste aber, wodurch sich Furtwängler die Verehrung aller seiner Schüler in Wien erworben hat und wofür sie ihm auch stets dankbar sein werden, das waren sein echt deutsches Ethos von Arbeit und treuer Pflichterfüllung und sein Beispiel, mit dem er es uns vorgelebt hat.

Verzeichnis der Arbeiten.

1. Zur Begründung der Idealtheorie. Gött. Nachr. (1895), S. 381—384.
2. Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären kubischen Formen. Diss. Göttingen (1896), 64 S.
3. Über das Reziprozitätsgesetz der l -ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Gött. Abh. Neue Folge II (1902), S. 3—82.
4. Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage. Sitz. preuß. Akad. Wiss. Berlin (1902), S. 245—253.
5. Die Konstruktion des Klassenkörpers für solche algebraischen Zahlkörper, die eine l -te Einheitswurzel enthalten, und deren Idealklassen eine zyklische Gruppe vom Grad l^h bilden. Gött. Nachr. (1903), S. 203—217.
6. Über die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper, die eine l -te Einheitswurzel enthalten. Gött. Nachr. (1903), S. 282—303.
7. Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l -ten Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Math. Ann. 58 (1903), S. 1—50.
8. Die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper. Gött. Nachr. (1904), S. 173—195.
9. Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen. Enzykl. d. Math. Wiss. IV, 7, S. 1—61.
10. Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers. Math. Ann. 63 (1906), S. 1—37.
11. Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers. Erste Mitteilung. Gött. Nachr. (1906), S. 417—434.
12. Gemeinsam mit F. Kühnen, Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam. Veröffentl. Geod. Inst. (N. F. Nr. 27.). Berlin, P. Stankiewicz. 390 S. (1906).
13. Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers. Zweite Mitteilung. Gött. Nachr. (1907), S. 1—24.
14. Über die Klassenzahlen Abelscher Zahlkörper. Journ. f. Math. 134 (1908), S. 91 bis S. 94.
15. Gemeinsam mit F. Kühnen, Erwiderung auf den Vortrag des Herrn W. Felgenhauer: Der Einfluß der Schneiden auf die Bestimmung der Schwerebeschleunigung mit dem Reversionspendel. Verhandl. Deutsche Phys. Ges. 10, S. 389—390.
16. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. Erster Teil. Math. Ann. 67 (1909), S. 1—31.
17. Gemeinsam mit R. Bourgeois. Kartographie. Enzykl. d. math. Wiss. VI 1, 4, S. 245—296.
18. Untersuchungen über die Kreisteilungskörper und den letzten Fermatschen Satz. Erste Mitteilung. Gött. Nachr. (1910), S. 554—562.
19. Über das Minimum einer Quadratsumme linearer Formen. Math. Ann. 70 (1911), S. 405—409.
20. Über die Klassenzahlen der Kreisteilungskörper. Journ. f. Math. 140 (1911), S. 29—32.
21. Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper. Gött. Nachr. (1911), S. 293—317.
22. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. Zweiter Teil. Math. Ann. 72 (1912), S. 346—386.
23. Pendel. Handwörterbuch d. Naturwiss. 7, Fischer, Jena, S. 556—573.

24. Gemeinsam mit G. Ruhm, Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser. Teubner (Abhandl. über d. math. Unterr. in Deutschland, veranlaßt durch die IMUK. 4. Heft 8).
25. Letzter Fermatscher Satz und Eisensteinsches Reziprozitätsgesetz. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **121**, (1912), S. 589—592.
26. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste und Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. Dritter und letzter Teil. Math. Ann. **74** (1913), S. 413—429.
27. Über das Verhalten der Ideale des Grundkörpers im Klassenkörper. Mh. f. Math. **27**, (1916), S. 1—15.
28. Über Kriterien für die algebraischen Zahlen. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **126** (1917), S. 299—309.
29. Über die Führer von Zahlringen. Wiener Anzeiger **56** (1919), Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **128** (1919), S. 239—245.
- 30/31. Über die Ringklassenkörper für imaginäre quadratische Körper I, II. Wiener Anzeiger **56** (1919), S. 75; Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **128** (1919), S. 247—289; **129** (1920), S. 161—200.
32. Gemeinsam mit M. Zeisel. Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximation. Mh. f. Math. **30** (1920), S. 177—198.
33. Punktgitter und Idealtheorie. Math. Ann. **82** (1921), S. 256—279.
34. Über Kriterien für irreduzible und für primitive Gleichungen und über die Aufstellung affektfreier Gleichungen. Math. Ann. **85** (1922), S. 34—40.
35. Über Minimalbasen für Körper rationaler Funktionen. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **134** (1925), S. 69—80.
36. Über die linearen Mannigfaltigkeiten auf Hyperflächen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 396—400.
37. Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen. Math. Ann. **96** (1926), S. 169—175.
38. Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten. Journ. f. Math. **157** (1926), S. 15—25.
39. Über die Reziprozitätsgesetze für ungerade Primzahlexponenten. Math. Ann. **98** (1927), S. 539—543.
40. Fr. Mertens†. Alm. Akad. Wiss. Wien **77** (1927), 4 S.
41. Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen II. Math. Ann. **99** (1928), S. 71—83.
42. Über affektfreie Gleichungen. Mh. f. Math. **36** (1929), S. 89—96.
43. Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. Abh. Hamburg **7** (1930), S. 14—36.
44. Über die Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper. Journ. f. Math. **167** (1932), S. 379—387.
45. Über einen Determinantensatz. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **145** (1936), S. 527 bis S. 528.
46. Gemeinsam mit O. Taussky. Über Schieferringe. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **145**, (1936), S. 525.
47. Über Gitter konstanter Dichte. Mh. f. Math. **43** (1936), S. 281—288.
48. Über die Newtonschen Potenzsummenformeln. Mh. f. Math. **49** (1940), S. 194 bis 196.
49. Theorie der algebraischen Zahlkörper. Enzykl. d. math. Wiss. I. Neue Herausgabe (noch nicht erschienen).

(Eingegangen 8. 10. 1940.)