Piers Bohl zum Gedächtnis.

Von Adolf Kneser in Breslau und Alfred Meder in Riga.

Ein tiefsinniger und scharfsinniger Mathematiker, einer der bedeutendsten, die der deutschbaltische Stamm bis jetzt hervorgebracht hat, ist mit Piers Bohl am 25. Dezember 1921 hingeschieden. Wir würdigen seine wissenschaftliche Arbeit und berichten über seinen Lebenslauf.

Bohl hat folgende Abhandlungen veröffentlicht, die wir nach den beigefügten Ziffern zitieren werden.

1. Das Gesetz der molekularen Attraktion. Wiedemanns Annalen der Physik, Bd. 36, S. 334—346. 1889.
2. Verallgemeinerung des dritten Keplerschen Gesetzes. Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 35, S. 188—191. 1890.
3. Über die Darstellung von Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehreren, einer Variablen proportionalen Argumenten. (Dissertation zur Erlangung des Grades des Magisters der Mathematik bei der physikomathematischen Fakultät der Universität Dorpat. 31 S. 4°.) Dorpat, Druck von C. Mattiesen. 1893.
4. O někotorych differencialjnych uravnenijach obščago charaktera priměnimych v mechanikě. (Über einige in der Mechanik anwendbare Differentialgleichungen allgemeinen Charakters. Dissertation zur Erlangung des Grades des Doktors der angewandten Mathematik bei der oben genannten Fakultät. 113 S. 4°.) Dorpat, Druck von Schnakenburg. 1900. Übersetzung: Sur certaines équations différentielles d'un type général utilisables en mécanique. Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 38, S. 1—134. 1910.
5. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. Crelles Journal f. Math., Bd. 127, S. 179—276. 1904.
6. Über ein Dreikörperproblem. Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 54, S. 381—418. 1906.
7. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie. Crelles Journal f. Math., Bd. 131, S. 268—321. 1906.
8. Zur Theorie der trinomischen Gleichungen. Math. Ann., Bd. 65, S. 556—566. 1908.
9. Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem. Crelles Journal f. Math., Bd. 135, S. 189—283. 1909.
10. Über Differentialungleichungen. Crelles Journal f. Math., Bd. 144, S. 284—313. 1913.
11. Über die hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen Variablen periodische Differentialgleichung erster Ordnung. Acta math. Bd. 40, S. 321—336. 1916.

I. Schon Bohls Magisterdissertation (3) kommt zu einem für die Himmelsmechanik und verwandte Untersuchungen zweifellos bedeutsamen Ergebnis; handelt es sich doch um Reihen, die auf unendlich ausgedehnten Gebieten gleichmäßig konvergieren. Für die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Reihe der im Titel der Abhandlung bezeichneten Art wird eine hinreichende und notwendige Bedingung gegeben. Sei $\psi(t)$ für alle reellen Werte von t stetig definiert; wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, könne eine Größe η so gewählt werden, daß $\psi(t+\tau) - \psi(t) \,| < \varepsilon$ wird, sobald die Größen $\tau/\alpha_1, \tau/\alpha_2, \ldots \tau/\alpha_n$, in denen α gegebene reelle Größen sind, sich von ganzen Zahlen um weniger als η unterscheiden. Dann gibt es eine Funktion $\Psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die überall stetig und in $x_1, x_2, \ldots$ periodisch ist mit der Periode 1 und so beschaffen, daß

$$\psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1}, \frac{t}{\alpha_2}, \cdots \frac{t}{\alpha_n}\right)$$

wird. Jede Funktion $\Psi(x_1, x_2, \ldots)$ kann nun in eine für alle Werte $x_1, x_2, \ldots$ gleichmäßig konvergierende Summe von Polynomen in $\cos 2\pi x_\nu$ und $\sin 2\pi x_\nu$ entwickelt werden, womit dann die gewünschte Entwicklung der Funktion $\psi(t)$ gegeben ist. Bei der Bildung der Funktion Ψ berührt sich Bohl mit der ihm damals unbekannten Abhandlung von Kronecker über näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen (Werke 3, S. 47).

II. Die Doktordissertation (4) bringt eine Fülle von Sätzen über Differentialgleichungssysteme

$$\frac{dx_\nu}{dt} = L_\nu(x) + \xi_\nu(x, t), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

in denen L_ν lineare Funktionen mit konstanten Koeffizienten, ξ_ν beliebige in der Hauptsache durch Ungleichungen charakterisierte Funktionen sind. Es handelt sich um das Verhalten der Lösungen bei unbegrenzt wachsenden Werten von t, und es wird unter sehr allgemeinen Bedingungen die Existenz von Lösungen nachgewiesen, bei denen die Größen x_ν auch bei unbegrenzt wachsenden Werten von t innerhalb eines endlichen, die Stelle $x_\nu = 0$ umfassenden Gebiets verbleiben, so daß eine gewisse Stabilität vorliegt; ja auch Lösungen werden gebildet, die dies Verhalten von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ zeigen, und zu den erstgenannten in asymptotischen Annäherungsverhältnissen stehen. Hier liegen bedeutende Verallgemeinerungen der Sätze von Poincaré über asymptotische Lösungen der himmelsmechanischen Differentialgleichungen vor; auch die Untersuchungen von Kneser über Bewegungen in der Nähe labiler Gleichgewichtslagen werden zum Ausgangspunkt genommen und verallgemeinert.

Sind im besonderen die Größen ξ_ν aus Funktionen $f_\nu(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m)$, die in den Größen u periodisch mit der Periode 1 sind, entstanden, indem man

$$\xi_\nu(x, t) = f_\nu\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{t}{\alpha_1}, \frac{t}{\alpha_2}, \ldots \frac{t}{\alpha_n}\right)$$

setzt, so ergeben sich aus den Sätzen der Magisterdissertation eine Fülle von Ergebnissen über die Existenz von stabilen Lösungen, die durch gleichmäßig für alle t konvergierende trigonometrische Reihen der oben bezeichneten Art dargestellt werden können.

Unter den allgemeinen Sätzen, die Bohl in dieser Abhandlung aufstellt, sind solche, bei denen die Analysis durch topologische Erwägungen gefördert wird; z. B. folgender Satz: Sind X und Y auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leqq 1$ stetige Funktionen des Ortes, und ist auf dem Rande der Scheibe immer $X = x$ und $Y = y$, so müssen X und Y in mindestens einem Punkte der Scheibe zugleich verschwinden. Man kann hieraus einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ableiten.

Als Anwendung der erhaltenen Sätze betrachtet Bohl die Bewegung des Saturn und des fest gedachten Saturnringes und zeigt, daß es solche störende Kräfte allgemeiner Natur gibt, daß es trotz ihrer Wirkung in unbegrenzten Zeiten zu keinem Zusammenstoß zwischen beiden Körpern kommt, im Widerspruch zu Laplace, der bei jeder geringsten Störung des Gleichgewichts das Herabstürzen des Rings auf den Saturn befürchtete.

Später (6) hat Bohl seine Ergebnisse auf den Fall übertragen, daß ein dritter Körper, etwa ein Trabant, seinen störenden Einfluß im Ring-Saturnsystem geltend macht.

In enger Beziehung zu den beiden Dissertationen, besonders der ersten, steht die Abhandlung (7). Haben in der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x f(t) = \varphi(t)$$

die Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ den Charakter der oben unter I. definierten Größe $\psi(t)$, und liegt jedes Integral der Gleichung für alle Werte von t zwischen von t unabhängigen Schranken, so kann das allgemeine Integral in der Form

$$x = \frac{c_1 \cos u + c_2 \sin u}{\sqrt{R}} - T, \quad u = \int_0^t R\, dt$$

geschrieben werden, wobei T und R wiederum im weiteren Sinne periodische Funktionen wie $\psi(t)$ sind. Damit ist die allgemeine Form des Integrals in dem Sinne hergestellt, wie man es in der Lehre von den linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten gewohnt ist.

III. Von sehr bedeutendem mechanischem Interesse ist die Abhandlung (5), die anknüpft an die oben erwähnten Untersuchungen von Kneser, die Dissertation von Karstens über asymptotische Annäherungen an labile Gleichgewichtslagen (Berlin 1901) und an die Dissertation (4). Untersucht wird die Existenz und Mannigfaltigkeit der Bewegungen, bei denen ein dynamisches System beständig, d. h. auch für $t = +\infty$, in der Nähe einer Gleichgewichtslage verbleibt, deren Charakter von der Stabilität durch die möglichen Zwischenstufen bis zur vollen Labilität beliebig angenommen werden kann. Als Beweismittel dienen folgende Sätze, die wieder sozusagen topologischer Natur sind. In einem Gebiet $|x_\nu| \leqq a_\nu$ seien, $\nu = 1, 2, \ldots n$ gesetzt, $f_1, f_2, \ldots f_n$ stetige Funktionen der Größen x; sie mögen nirgends alle zugleich verschwinden. Dann gibt es mindestens eine Stelle auf der Umgrenzung jenes Gebiets, an der also mindestens eine Gleichung $|x_\nu| = a_\nu$ gilt, und die die Gleichungen $f_\nu(x_1, \ldots x_n) = Nx_\nu$ liefert, wobei $N < 0$ von ν nicht abhängt. Oder auch: es gibt keine stetigen Funktionen $F_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in dem definierten Gebiet, die nirgends sämtlich zugleich verschwinden und auf der Begrenzung überall die Gleichungen $x_\nu = F_\nu$ liefern. Im Anschluß hieran wird ohne Beweis der folgende Satz ausgesprochen, der sich mit topologischen Untersuchungen neuerer Autoren berührt: Werden die Punkte einer Kugelfläche in Punkte derselben übergeführt mittels stetiger Bewegungen auch durch den Raum hindurch, bei denen aber der Mittelpunkt der Kugel nicht erreicht wird, so kehrt mindestens ein Punkt der Kugeloberfläche in seine ursprüngliche Lage zurück.

Mittels dieser Sätze werden solche Lagen des Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage charakterisiert, von denen ausgehend das System für $t = \infty$ in einer bestimmten Umgebung der Gleichgewichtsstelle verbleibt oder auch sich dieser asymptotisch annähert. Zu solchen Bewegungen gibt es andere, sich ihnen asymptotisch annähernde, die sogar von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ in der bestimmten Umgebung der Gleichgewichtsstelle verbleiben.

In dem besonderen Falle, daß, wie man sagt, nur eine stabile Koordinate vorhanden ist, d. h. das Potential, wenn $x_\nu = 0$ die Gleichgewichtslage ist, bis auf höhere Glieder in der Form

$$U = \alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_2^2 - \cdots - \alpha_n x_n^2 + \cdots$$

mit positiven Werten α dargestellt wird, ergibt sich auch die sehr merkwürdige Tatsache, daß die in einem gewissen Gebiet verbleibenden Lösungen periodisch sind; die Periode kann einem Werte $2\pi/p$ beliebig nahe liegen, wobei p eine Konstante der Aufgabe ist.

Diese Abhandlung unterscheidet sich von der Dissertation (4) durch den durchgehenden Gebrauch des Integrals der lebendigen Kraft.

IV. Merkwürdig ist ein Satz (6) über trinomische Gleichungen $ax^n + bx^m + c = 0$ mit komplexen Koeffizienten a, b, c und positiv ganzzahligen Exponenten m, n. Aus den absoluten Beträgen und Winkelargumenten der Größen a, b, c und einer gegebenen positiven Zahl p kann durch einfache elementare Rechnung eine ganze Zahl gebildet werden, die genau angibt, wie viele Wurzeln der Gleichung einen absoluten Betrag $< p$ besitzen.

Dieser Satz steht in Verbindung mit ausgedehnten Untersuchungen Bohls über Störungstheorie. Schon die Magisterdissertation war durch die Arbeiten von Poincaré und Lindstedt angeregt; in einer späteren Abhandlung (9) geht Bohl davon aus, daß in der Theorie der säkularen Störungen, wenn e, ω, Φ, Θ die Exzentrizität, die Perihellänge, die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens bedeuten, die Größen $e \cos \omega$, $e \sin \omega$, $\operatorname{tg} \Phi \sin \Theta$ und $\operatorname{tg} \Phi \cos \Theta$ linear mit konstanten Koeffizienten durch endlichviele Glieder wie $\cos(at + b)$, $\sin(at + b)$ mit festen Werten a, b dargestellt werden können. Die Frage ist, ob die so definierten Größen ω und Θ eine mittlere Bewegung haben, d. h. die Form $ct + \chi$, wobei t ein Festwert ist und χ für $t = \infty$ beschränkt bleibt. Kritisch Stellung nehmend zu Arbeiten von Gyldén, Cavallin, Stockwell, Charlier, gibt Bohl bestimmte Kriterien dafür, wann eine mittlere Bewegung vorhanden ist, und sondert die Fälle aus, in denen die Frage grundsätzlich nicht entschieden werden kann.

Das Hauptbeweismittel bilden wichtige Sätze aus der Geometrie der Zahlen. Hier findet sich zuerst der Fundamentalsatz der Lehre von der Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins. Ist (α) der Überschuß der reellen Größe α über die nächste, sie nicht überschreitende ganze Zahl, ist ferner n eine beliebige positive ganze, ξ eine bestimmte Irrationalzahl, so bedecken die Werte $(n\xi)$ die Strecke $0 \cdots 1$ überall gleich dicht. Ja noch mehr. Ist s die Länge einer Zahlenstrecke zwischen 0 und 1, und $\varphi(n)$ die Anzahl der in sie hineinfallenden unter den Größen $(\xi), (2\xi), \ldots (n\xi)$, so ist nicht nur nach dem Fundamentalsatz $\lim \varphi(n)/n = s$ für $n = \infty$, sondern die Verteilungsfunktion $\varphi(n)$ kann zwei wesentlich verschiedene Charaktere aufweisen: entweder kann $\varphi(n) = n(s + \varepsilon)$ gesetzt werden, wobei $n\varepsilon$ beschränkt ist für $n = \infty$; oder dies ist nicht der Fall. In jeder Nähe einer beliebigen Zahl gibt es sowohl Werte ξ, für die $\varphi(n)$ ersteres Verhalten zeigt, wie auch solche Werte ξ, für die der entgegengesetzte Fall vorliegt. Der Fundamentalsatz ist später von Herrn Weyl ausgebaut und von Herrn Hecke auf wichtige Fragen der Arithmetik angewandt worden.

V. Die vorletzte Arbeit (10) ist einer grundsätzlichen Frage von großer Tragweite gewidmet. Ein Differentialgleichungssystem von allgemeiner Form

$$\frac{d^{\mu_i} x_i}{dt^{\mu_i}} = X_i\left(t, \frac{d^{\nu_i} x_i}{dt^{\nu_i}}\right), \qquad (\nu_i = 0, 1, \ldots \mu_i - 1)$$

sei auf der t-Strecke T integriert. Ersetzt man dasselbe durch die Ungleichungen

$$\left|\frac{d^{\mu_i} \bar{x}_i}{dt^{\mu_i}} - X_i\left(t, \frac{d^{\nu_i} \bar{x}}{dt^{\nu_i}}\right)\right| < \varepsilon$$

und gibt den Größen $d^{\nu_i} x_i/dt^{\nu_i}$ und $d^{\nu_i} \bar{x}_i/dt^{\nu_i}$ an einer bestimmten Stelle der Strecke T dieselben Werte, so gibt es Klassen von Differentialgleichungen, bei denen auf der Strecke T immer die Ungleichung

$$|x_i - \bar{x}_i| < k\varepsilon$$

besteht, sobald $0 < \varepsilon < e$; dabei sind $k < e$ durch das Gleichungssystem bestimmte Größen; und zwar tritt dies ein, wenn eine gewisse, durch die Differentialgleichungen bestimmte Größe, die der Index genannt wird, positiv ist. Der Index eines Systems positiver Funktionen ist eine Zahl g derart, daß, wenn $t_2 \geqq t_1$ und $\alpha < g$, die Größen $e^{\alpha(t_2 - t_1)} f(t_2)/f(t_1)$ unter einer festen Grenze liegt, während dies bei der Annahme $\alpha > g$ nicht der Fall ist. Man sieht, daß auch hier eine für die Anwendungen, besonders die angenäherte Integration wichtige Frage mit einer eigenartigen Begriffsbildung in Angriff genommen wird.

Die letzte Arbeit (11) verschärft einen auf ihren Gegenstand bezüglichen Satz von Poincaré und E. E. Levi.

VI. Was Bohl in allen diesen Arbeiten, auch den Jugendarbeiten (1) und (2) trieb und leistete, war beste und echteste angewandte Mathematik, wenn anders dieses Wort wertvolle und eigenartige wissenschaftliche Arbeit bezeichnen soll. Das ist nicht das oft beobachtete schüchterne Werben des mathematischen Liebhabers, der der sehnlichst umworbenen Nachbarwissenschaft zuliebe seine besten Schätze, Strenge und schulmäßigen Ernst preisgibt, um schließlich doch als unglücklicher Liebhaber allein zu bleiben; ein starker Mathematiker wie Bohl nimmt alle Kraft zusammen und überwindet die Widerstände, indem er alle Künste der eigenen Wissenschaft spielen läßt. Er hat dabei einen langen Atem, auch in der Darstellung, und verlangt einen aufmerksamen und ausdauernden Leser, der den großen Zusammenhang nicht immer ohne Mühe erkennt; in der Sache ist Bohl immer klar und streng und erreicht, wie man sieht, stets sehr bestimmte, greifbare Ziele. Er hat den einst in Rußland und Livland hochgeschätzten Titel eines Doktors der angewandten Mathematik in hohen Ehren getragen.

VII. Piers Bohl wurde am 23. Oktober 1865 in dem livländischen Städtchen Walk geboren; seine Eltern waren der Kaufmann Georg Bohl und dessen Gattin Ottilie geb. Ehmann. Den ersten Unterricht erhielt er durch Privatlehrer und in der städtischen Elementarschule zu Walk; im Jahre 1878 bezog er das livländische ritterschaftliche Landesgymnasium in Fellin, das er 1884 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Im August desselben Jahres wurde er an der Universität Dorpat für das Studium der Mathematik immatrikuliert, das er nach drei Jahren als Kandidat beendigte; dieser Titel bedeutete dort nicht einen Anwärterzustand, sondern den ersten akademischen Grad. Damals wirkten nach Mindings Abgang auf dem Lehrstuhl der angewandten Mathematik Lindstedt, von 1886 an Staude, von 1889 an Kneser; die Professur der reinen Mathematik verwaltete bis 1888 Helmling, der aber Bohls Studien wenig beeinflußt hat, und dann bis 1892 F. Schur. Im Dezember 1886 erhielt Bohl die goldene Medaille für eine Preisarbeit unter dem Titel: Theorie und Anwendung der Invarianten linearer Differentialgleichungen. Nach Beendigung des Studiums war Bohl eine Zeitlang Hauslehrer, widmete sich aber seit 1889 der weiteren Ausbildung durch eigene wissenschaftliche Arbeit, hauptsächlich in Dorpat; eine Zeitlang war er Lehrer am kurländischen Lehrerseminar in Irmlau. Im Februar 1893 promovierte er zum Magister mit der Abhandlung (3), im September 1900, kurz vor Knesers Abgang von Dorpat, zum Doktor mit der Abhandlung (4).

Im September 1895 wurde Bohl an das Baltische Polytechnikum zu Riga berufen und hat dieser Hochschule in all den verschiedenen Formen, die dieselbe im Laufe der Jahre infolge der politischen und anderer Verhältnisse angenommen hat, bis an das Ende seines Lebens angehört, zuerst als außerordentlicher, seit 1900 als ordentlicher Professor. Er hat diese ganze Zeit hindurch die höhere Mathematik, soweit sie zur Ausbildung der Bau- und Maschineningenieure gehört, vorgetragen, außerdem einmal vertretungsweise die analytische Mechanik. Er trug in russischer Sprache vor. Es war ihm bei seiner kritisch-mathematischen Veranlagung nicht immer leicht, von der Strenge, wie sie die reine mathematische Wissenschaft verlangt, bisweilen zugunsten eines leichteren Verständnisses für seine technisch auszubildenden Zuhörer abzugehen. Eifrig und unermüdlich hat er neben dieser Lehrtätigkeit auch eigener wissenschaftlicher Forschung gelebt; eine große Bibliothek und die von ihm verfaßten wissenschaftlichen Abhandlungen legen Zeugnis hiervon ab.

Auch auf einem nichtmathematischen Gebiete hat er sich hervorgetan, nämlich auf dem des Schachspiels. „Er war“, heißt es in einem

Nachruf von A. Lüth in der Rigaschen Rundschau, „ein hervorragender Kombinationsspieler, seine Partien waren stets geistreich. Es kam ihm weniger darauf an, eine Partie zu gewinnen, als sie lebhaft und spannend zu gestalten; das Schach als solches gewährte ihm reine Freude und Genuß. Unvergänglich bleibt sein Verdienst in den hauptsächlich von ihm und dem baltischen Schachmeister Karl Behting für den Rigaer Schachverein durchweg siegreich geleiteten Schachwettkämpfen mit den stärksten Schachvereinen Europas. Hier hat er die Schachwelt durch mancherlei geistreiche Neuerungen überrascht, unter anderem durch die von ihm gefundene, seinerzeit geradezu verblüffend wirkende Rigaer Variante in der Spanischen Partie."

Bohl war unverheiratet. Einsam wie wenige Menschen ist er durchs Leben gegangen. Fast die einzige Zerstreuung, die er sich gönnte, bestand in regelmäßigen Reisen während der Sommermonate. Einen großen Teil Europas hat er hierbei kennen gelernt. Der Weltkrieg, der so vieles geändert, so unendlich vieles vernichtet hat, griff mit harter Hand auch in dieses stille und abgeschiedene Leben hinein, vernichtend und abtötend, was in ihm an geistiger Schaffenskraft vorhanden war und was bei ruhiger Weiterentwicklung reiche Frucht für die mathematische Wissenschaft getragen hätte. Bohl hat seit 1914 nicht mehr die Sammlung gefunden und die Energie aufbringen können, die zu wissenschaftlicher Vertiefung nötig ist. Namentlich die drei, infolge der Evakuation des Rigaer Polytechnikums, in Moskau verbrachten Jahre haben ihn zermürbt. Als gebrochener Mann kehrte er nach Riga zurück und hat hier seinen Verpflichtungen an der heimatlichen Hochschule nur noch mit Mühe nachkommen können. Er fühlte, wie es mit ihm bergab ging, und hat schwer darunter gelitten. Im April 1921 warf ihn ein Schlaganfall aufs Krankenlager; als er im Herbst den Hochschulunterricht wieder aufnehmen wollte, versagte sein Gedächtnis. Er erhielt für ein Semester Urlaub; ein mitleidiger Tod hat ihn vor erneuter schwerer Enttäuschung in dieser Beziehung bewahrt. Am ersten Weihnachtsfeiertage, bei schönem Sonnenschein, hat ihn ein zweiter Schlaganfall auf einem Spaziergange dahingerafft. Nur wenigen hat er einen Einblick in sein Inneres gewährt, doch diese wenigen werden stets mit Liebe seines warmen mitfühlenden Herzens und seiner seltenen Bescheidenheit gedenken.

(Eingegangen am 20. 6. 23.)