Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

> Arbeitsberichte des Instituts für Wirtschaftsinformatik

Tagungsband 16. Kolloquium Programmiersprachen und Grundlagen der Programmierung (KPS'11)

Arbeitsbericht Nr. 132

wissen.leben
WWU Münster

WIRTSCHAFTS
INFORMATIK

TituRel: Sprache für die Relationale Mathematik
(Extended Abstract)

Gunther Schmidt

Fakultät für Informatik, Universität der Bundeswehr München
85577 Neubiberg, Germany
gunther.schmidt@unibw.de

Zusammenfassung. TituRel ist formuliert in Haskell. Es erwies sich als wertvolle Hilfe für viele Untersuchungen: Spiele, (Bi-)Simulationen, qualitative Fuzzy-Steuerungen, Theorie-Extraktion, Social Choice, Entscheidungsunterstützungen bei Intervall-Ordnungen u.v.a. TituRel ermöglicht algebraisch begründbare Visualisierungen, Beweise und Transformationen, bietet aber durch den Einsatz von generischen dependent types auch ein ernsthaftes programmiersprachliches Untersuchungsfeld.

Keywords relational mathematics, TituRel, dependent types.

1 Vorbemerkung

Nur wenige arbeiteten relational. Hier geht es damit um Fragestellungen bei einer Sprache, die wenige kennen. Wozu überhaupt schon wieder eine neue Sprache? Einiges zur Motivation findet man in [SS89,SS93,Sch03,Sch11].

2 Idee der Relationalen Mathematik

Zunächst sollen zwei Beispiele die Idee der relationalen Mathematik andeuten:

— Datenanalyse mit der difunktionalen Hülle,
— Präferenzuntersuchung mit einer Semiordnung.

Die dazu dienende Sprache TituRel wurde entworfen mit folgenden Zielen:

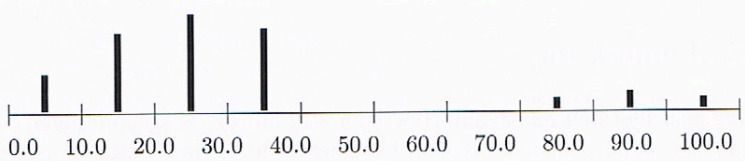
- Alle jemals behandelten Relationen-Probleme sollten sich ausdrücken lassen.
- Relationale Konstrukte sollten sich, z.B. als boolesche Matrizen, direkt im TituRel-Substrat auswerten lassen.
- Transformation von relationalen Termen und Formeln zu Umformung und Optimierung sollte unterstützt werden.
- Die Übersetzung relationaler Ausdrücke in TEX-Darstellung und in die Prädikatenlogik 1. Stufe sollte automatisiert werden.
- Beweisunterstützung für relationale Aussagen und Verwaltung von Beweis-Abhängigkeiten sollte möglich sein.

2.1 Datenanalyse

Ausgangspunkt für das Beispiel sei folgende Matrix von Prozentwerten als Ergebnis einer statistischen Auswertung. Hieraus sollen Schlüsse gezogen und zugrundeliegende Strukturen bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix}
38.28 & 79.91 & 28.42 & 36.11 & 25.17 & 11.67 & 17.10 & 24.73 & 81.53 & 35.64 & 34.36 \\
13.35 & 23.78 & 18.92 & 34.89 & 13.60 & 6.33 & 25.26 & 36.70 & 34.22 & 98.15 & 8.32 \\
5.69 & 34.43 & 27.17 & 15.23 & 26.50 & 30.26 & 31.56 & 26.84 & 17.93 & 30.38 & 3.75 \\
23.40 & 20.35 & 25.94 & 38.96 & 36.10 & 25.30 & 19.17 & 89.17 & 27.34 & 15.25 & 5.58 \\
96.37 & 13.89 & 23.16 & 21.64 & 35.56 & 36.77 & 21.71 & 77.20 & 33.61 & 18.30 & 17.67 \\
20.26 & 33.71 & 20.78 & 37.21 & 16.76 & 8.83 & 88.93 & 15.18 & 83.58 & 23.60 & 16.60 \\
29.85 & 14.76 & 22.21 & 35.70 & 13.34 & 39.82 & 29.30 & 18.85 & 26.29 & 24.73 & 37.90 \\
79.37 & 18.67 & 5.94 & 28.30 & 78.56 & 27.40 & 16.46 & 34.46 & 17.92 & 24.30 & 33.46 \\
37.89 & 26.70 & 4.13 & 14.50 & 23.23 & 21.56 & 35.75 & 34.30 & 21.59 & 17.39 & 39.29 \\
18.82 & 23.00 & 77.50 & 16.10 & 9.74 & 84.71 & 21.30 & 35.32 & 19.57 & 24.78 & 22.43 \\
5.38 & 36.85 & 94.38 & 28.10 & 37.30 & 25.30 & 33.14 & 31.20 & 13.24 & 93.39 & 23.42 \\
14.82 & 18.37 & 1.87 & 19.30 & 84.82 & 23.26 & 28.10 & 26.94 & 19.10 & 34.25 & 35.85 \\
7.63 & 28.80 & 10.40 & 89.81 & 17.14 & 7.33 & 96.57 & 16.19 & 35.96 & 8.96 & 27.42 \\
39.70 & 14.16 & 7.59 & 21.67 & 34.39 & 88.68 & 18.80 & 29.37 & 7.67 & 8.11 & 36.54
\end{pmatrix}$$

Es wäre hier wenig hilfreich, etwa die Zeilen-Mittelwerte zu bilden. Ein Histogramm gibt aber gewisse erste Information.



Durch einen Cut, der in dem weiten Bereich zwischen 40 und 70 Prozent variieren kann ohne die entstehende Relation zu ändern, entsteht nachfolgende Relation:

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Mit einer Interpretation von R als Hypergraph kommt man zu den beiden folgenden Relationen $R;R^{\mathsf{T}}$ und $R^{\mathsf{T}};R$.

$$
\begin{array}{c}
\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ a\\b\\c\\d\\e\\f\\g\\h\\i\\j\\k
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}a&b&c&d&e&f&g&h&i&j&k\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Die transitiven Hüllen $(R;R^{\mathsf{T}})^*, (R^{\mathsf{T}};R)^*$ der Punkt- bzw. Kantenadjazenz des Hypergraphen ergeben sich in einer bereits umgeordneten Form wie folgt.

$$
\begin{array}{c}
\\ 1\\6\\13\\2\\10\\11\\14\\4\\5\\8\\12\\3\\7\\9
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc}1&6&13&2&10&11&14&4&5&8&12&3&7&9\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cccc|cccc|c|c|c}
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ b\\d\\g\\i\\c\\f\\j\\a\\e\\h\\k
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}b&d&g&i&c&f&j&a&e&h&k\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc|c}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Hier finden wir eine erste Strukturaussage.

$$
\begin{array}{c}
\\ 1\\6\\13\\2\\10\\11\\14\\4\\5\\8\\12\\3\\7\\9
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}b&d&g&i&c&f&j&a&e&h&k\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc|c}
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right)
\end{array}
= R_{\text{umgeordnet}}
$$

Bei der Relation R in analoger Umordnung stellen sich die entstehenden Teil-Felder als **chainable** heraus: Mit einem Schach-Turm, der seine Richtung nur auf einer **1** ändern darf, kann man von jedem **1** -Feld zu jedem anderen **1** -Feld der Zone, aber nicht in den anderen Zonen gelangen.

2.2 Semiordnungen

Dieses Beispiel beginnen wir mit dem algebraischen Sachverhalt. Wir nennen eine (möglicherweise heterogene) Relation A **Ferrers**, falls $A;\overline{A}^{\mathsf{T}};A \subseteq A$. Man sieht schnell, dass A die Ferrers-Eigenschaft besitzt, genau wenn auch $\overline{A}$, A^{T} sie haben. Falls A Ferrers ist, so auch $\overline{\overline{A};A^{\mathsf{T}}}$ und $\overline{A^{\mathsf{T}};\overline{A}}$, die „Zeile-enthält-Zeile-“ und die „Spalte-ist-enthalten-in-Spalte“-Ordnung. Man kann beweisen, dass sich Relationen mit der Ferrers-Eigenschaft stets durch unabhängige Zeilen- und Spalten-Umordnung zu einer Treppenrelation permutieren lassen.

$$
\begin{array}{c}
\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&0&1\\
1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&1&1&1\\
1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ 9\\2\\6\\10\\7\\5\\12\\1\\4\\11\\3\\8\\13
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
5&9&10&2&6&12&4&7&11&1&13&3&8
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

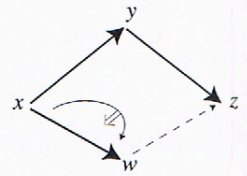
Obige Relation ist nur zufällig homogen. Man studiert aber in der Praxis oft gerade diesen Fall, nämlich **Semiordnungen** als adäquate Behandlung von **Schwellwerten, Thresholds**.

Eine Relation R heißt **Semiordnung** falls sie eine **semi-transitive** Ferrers Ordnung ist, also zusätzlich zur Ordnungs- und Ferrers-Eigenschaft über die folgende recht ähnlich gebaute Eigenschaft verfügt:

$$R;R;\overline{R}^{\mathsf{T}} \subseteq R.$$

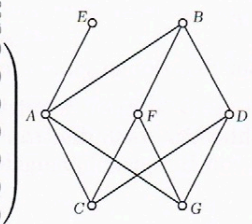
Bildlich und in prädikatenlogischer Form heißt semi-transitiv folgendes:

$$\forall x,y,z,w \in X : \{R_{xy} \wedge R_{yz} \rightarrow R_{xw} \vee R_{wz}\}$$



Ist solch eine Semiordnung gegeben, so lässt sie sich stets durch *simultane* Permutation von Zeilen und Spalten auf eine Treppengestalt bringen — eine für Ökonometrie und Präferenzforschung zentrale Form der Gewinnung von Übersicht.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Alfred} \\ \text{Barbara} \\ \text{Christian} \\ \text{Donald} \\ \text{Eugene} \\ \text{Frederick} \\ \text{George} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \text{Alfred} & \text{Barbara} & \text{Christian} & \text{Donald} & \text{Eugene} & \text{Frederick} & \text{George} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \\ \text{Christian} \\ \text{George} \\ \text{Alfred} \\ \text{Frederick} \\ \text{Donald} \\ \text{Eugene} \\ \text{Barbara} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \text{Christian} & \text{George} & \text{Alfred} & \text{Frederick} & \text{Donald} & \text{Eugene} & \text{Barbara} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3 Sprachkonstrukte und ihre Interpretation

Für die genaue Buchhaltung bezüglich Zeilen- und Spaltenmengen wird von Kategorieobjekten gesprochen — ohne jeden tieferen Bezug zur Kategorientheorie.

Syntax	beabsichtigte Interpretation
Kategorieobjekt	endliche **geordnete** Basismenge, z.B.
`x`	`Colors = [red, gre, blu, ora]`
Relationaler Term	binäre Relation $R : X \longrightarrow Y$
`r`	$\begin{array}{r} \\ \text{Win} \\ \text{Draw} \\ \text{Loss} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{red} & \text{gre} & \text{blu} & \text{ora} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$
Operationen auf Relationen	konkrete Entsprechungen
`r :***: s`	$R;S$
`r :|||: s`	$R \cup S$
`r :&&&: s`	$R \cap S$
`Convs r`	R^{T}
`NegaR r`	$\overline{R}$
`Ident x`	$\mathbb{I}_X$

Natürlich gibt es noch die Null- und die Allrelation, $\mathbb{L}, \mathbb{T}$. Ebenso natürlich ist eine genaue Typkontrolle eingebaut, die erlaubt, mit `src(r)` von `r` zur Quelle der Relation zu gelangen.

Die Frage ist, ob auch noch die transitive Hülle als Operation angeboten werden soll. Einerseits braucht man sie oft, andererseits ist es eine zusammengesetzte

Operation. Will man auch Beweisunterstützung anbieten, muss sie über den Aufbau dieser Konstruktion definiert werden.

Wichtig ist noch, dass die Operatoren als **Konstruktoren** ausgelegt sind, damit man sie ggf. matchen und unifizieren kann. Eine weitere aufgrund interessanter Kürzungseigenschaften wichtige Operation ist der symmetrische Quotient

$$\mathtt{syq}(A,B) := \overline{A^{\mathsf{T}};\overline{B}} \cap \overline{\overline{A}^{\mathsf{T}};B}.$$

Neben diesen Operationen auf Relationen gibt es noch folgendes:

- Konstrukte für Mengen von Relationen: explizit und deskriptiv,
- Funktionale, wodurch schließlich auch die transitive Hülle möglich wird,
- Ansätze zur Verwaltung von Beweisabhängigkeiten.

3.1 Universelle Konstruktionen

Aufbauend auf diese einfacheren Konstruktionen werden weitere definiert:

Direktes Produkt: Es seien zwei Kategorieobjekte gegeben. Dann wird **jedes** Paar π, ρ von Relationen, das von einer gemeinsamen Quelle zu diesen Kategorieobjekten führt, ein direktes Produkt genannt, falls

$$\pi^{\mathsf{T}};\pi = \mathbb{I}, \quad \rho^{\mathsf{T}};\rho = \mathbb{I}, \quad \pi;\pi^{\mathsf{T}} \cap \rho;\rho^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}, \quad \pi^{\mathsf{T}};\rho = \mathbb{T}.$$

Syntax		beabsichtigte Interpretation
`DirPro`	`x y`	$X \times Y$
`Pi`	`x y`	$\pi : X \times Y \longrightarrow X$
`Rho`	`x y`	$\rho : X \times Y \longrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Paar- oder Tupelbildung erscheint uns vollkommen alltäglich. Dennoch sind die Projektionen nicht eindeutig festgelegt; man kann aber zeigen, dass sie bis auf Isomorphie eindeutig sind.

$$\begin{array}{r} \\ (\text{Mon,Win}) \\ (\text{Tue,Win}) \\ (\text{Mon,Draw}) \\ (\text{Wed,Win}) \\ (\text{Tue,Draw}) \\ (\text{Mon,Loss}) \\ (\text{Thu,Win}) \\ (\text{Wed,Draw}) \\ (\text{Tue,Loss}) \\ (\text{Fri,Win}) \\ (\text{Thu,Draw}) \\ (\text{Wed,Loss}) \\ (\text{Fri,Draw}) \\ (\text{Thu,Loss}) \\ (\text{Fri,Loss}) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Mon} & \text{Tue} & \text{Wed} & \text{Thu} & \text{Fri} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Win} & \text{Draw} & \text{Loss} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ (\text{Mon,Win}) \\ (\text{Mon,Draw}) \\ (\text{Mon,Loss}) \\ (\text{Tue,Win}) \\ (\text{Tue,Draw}) \\ (\text{Tue,Loss}) \\ (\text{Wed,Win}) \\ (\text{Wed,Draw}) \\ (\text{Wed,Loss}) \\ (\text{Thu,Win}) \\ (\text{Thu,Draw}) \\ (\text{Thu,Loss}) \\ (\text{Fri,Win}) \\ (\text{Fri,Draw}) \\ (\text{Fri,Loss}) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Mon} & \text{Tue} & \text{Wed} & \text{Thu} & \text{Fri} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Win} & \text{Draw} & \text{Loss} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Oben sind zwei verschiedene Paare π, ρ und π', ρ' von Projektionen angegeben. Mit Hilfe des damit angebotenen syntaktischen Materials kann man P definieren

$$P := \pi;\pi'^{\mathsf{T}} \cap \rho;\rho'^{\mathsf{T}}, \quad \text{welches} \quad P;\pi' = \pi \quad \text{und} \quad P;\rho' = \rho \text{ erfüllt,}$$

und die Umrechnung in einander zeigt.

Den Kategorientheoretiker wird überraschen, dass dieses Produkt — anders als gewohnt — gleichungsdefiniert ist.

Direkte Summe: Es seien wieder zwei Kategorieobjekte gegeben. Dann wird **jedes** in diesen startende Paar ι, κ von Relationen mit gemeinsamem Ziel eine direkte Summe genannt, falls

$$\iota;\iota^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}, \quad \kappa;\kappa^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}, \quad \iota^{\mathsf{T}};\iota \cup \kappa^{\mathsf{T}};\kappa = \mathbb{I}, \quad \iota;\kappa^{\mathsf{T}} = \mathbb{L}.$$

Syntax	beabsichtigte Interpretation
`DirSum x y`	$X + Y$
`Iota x y`	$\iota : X \longrightarrow X + Y$
`Kappa x y`	$\kappa : Y \longrightarrow X + Y$

$$\begin{tikzcd} & X+Y & \\ X \arrow[ur, "\iota"] & & Y \arrow[ul, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

Die hiermit ausgedrückte Variantenbildung kam in der Programmiersprachenentwicklung nur sehr spärlich vor. Sie kann nahezu *dual* zum Produkt genutzt werden. Wieder ist die Zuordnung einer Semantik nur bis auf Isomorphie eindeutig.

$$\iota = \begin{array}{c} \\ \spadesuit \\ \heartsuit \\ \diamondsuit \\ \clubsuit \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} \spadesuit & \text{Mon} & \heartsuit & \text{Tue} & \diamondsuit & \text{Wed} & \clubsuit & \text{Thu} & \text{Fri} & \text{Sat} & \text{Sun} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \kappa = \begin{array}{c} \\ \text{Mon} \\ \text{Tue} \\ \text{Wed} \\ \text{Thu} \\ \text{Fri} \\ \text{Sat} \\ \text{Sun} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} \spadesuit & \text{Mon} & \heartsuit & \text{Tue} & \diamondsuit & \text{Wed} & \clubsuit & \text{Thu} & \text{Fri} & \text{Sat} & \text{Sun} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\iota' = \begin{array}{c} \\ \spadesuit \\ \heartsuit \\ \diamondsuit \\ \clubsuit \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \text{Mon} & \text{Tue} & \text{Wed} & \text{Thu} & \text{Fri} & \text{Sat} & \text{Sun} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \kappa' = \begin{array}{c} \\ \text{Mon} \\ \text{Tue} \\ \text{Wed} \\ \text{Thu} \\ \text{Fri} \\ \text{Sat} \\ \text{Sun} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \text{Mon} & \text{Tue} & \text{Wed} & \text{Thu} & \text{Fri} & \text{Sat} & \text{Sun} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Auch hier sind zwei Paare von Injektionen gezeigt. Aus dem damit gegebenen syntaktischem Material kann der Übergang zwischen ihnen gebaut werden:

$$P := \iota^{\mathsf{T}};\iota' \cup \kappa^{\mathsf{T}};\kappa' \qquad \text{erfüllt} \qquad \iota;P = \iota' \quad \text{und} \quad \kappa;P = \kappa'.$$

Direkte Potenz: Es sei diesmal nur ein Kategorieobjekt X gegeben. Dann wird **jede** dort startende Relation ε eine direkte Potenz genannt, die folgendes erfüllt:

$\mathtt{syq}(\varepsilon,\varepsilon) \subseteq \mathbb{I}$,	(genaugenommen $\mathtt{syq}(\varepsilon,\varepsilon) = \mathbb{I}$)
$\mathtt{syq}(\varepsilon,R)$	ist surjektiv für jede Relation R mit Quelle X

Syntax	beabsichtigte Interpretation
`DirPow x`	$\mathcal{P}(X)$
`Member x`	$\varepsilon : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\mathtt{syq}(\varepsilon,R)"] \\ X \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[r, "R"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} \\ \spadesuit \\ \heartsuit \\ \diamondsuit \\ \clubsuit \end{array}
\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1 & 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 & 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 & 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&0 & 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Wieder sind zwei denkbare Enthaltenseinsrelationen $\varepsilon, \varepsilon'$ gezeigt. Aus dem somit angebotenen syntaktischen Material kann aber der Übergang hergestellt werden:

$$P := \mathtt{syq}(\varepsilon,\varepsilon') \quad \text{erfüllt} \quad \varepsilon;\mathtt{syq}(\varepsilon,\varepsilon') = \varepsilon'.$$

Zuvor war das Produkt — anders als in der üblichen kategoriellen Charakterisierung — gleichungsdefiniert; jetzt stellen wir fest, dass die Charakterisierung der Potenzmenge entsprechend nicht mehr 2. Stufe, sondern nur noch 1. Stufe ist — allerdings quantifizierend über Relationen.

3.2 Interpretation der Sprache

Normalerweise gibt man die Trägermengen einer Interpretation eindeutig an; hier aber offenbar nicht. Wir erinnern kurz an den Übergang von der Syntax zur Semantik bei der Prädikatenlogik. Gestartet wird mit der Gegenüberstellung

Zeichen	K Konstante φ Funktion p Prädikat	Interpretation I in Trägermenge	ein Element K_I für K eine Wertetafel φ_I für φ eine Teilmenge p_I für p

Aus den Zeichen und zusätzlichen Variablen V bildet man Terme und Formeln

$$T = V \mid K \mid \varphi(T) \qquad F = p(T) \mid \neg F \mid \forall V : F.$$

Bei gegebener Variablenbelegung $v : x \mapsto v(x)$ interpretiert man Terme

$$v^*(x) := v(x) \qquad v^*(k) := k_I \qquad v^*(\varphi(t)) := \varphi_I(v^*(t))$$

und Formeln

$$\models_{I,v} p(t) \;:\Longleftrightarrow\; v^*(t) \subseteq p_I, \qquad \models_{I,v} \neg F \;:\Longleftrightarrow\; \not\models_{I,v} F,$$
$$\models_{I,v} \forall x : F \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } s \text{ gilt } \models_{I,v_{x\leftarrow s}} F.$$

Bei den neuen Konstrukten sind bereitzustellen

Trägermengen für	und Wertetafeln für
— `DirPro x y`	— `Pi x y`, `Rho x y`
— `DirSum x y`	— `Iota x y`, `Kappa x y`
— `DirPow x`	— `Member x`

Man entscheidet sich einfach für eine der obigen mehr oder weniger naheliegenden Möglichkeiten als Trägermenge für `DirPro`, `DirSum`, `DirPow`. Deren **universelle** Konstruktion macht es „*bis auf Isomorphie*“ und damit hinreichend eindeutig.

3.3 Dependent types

Nun konstruieren wir auch dependent types: Quotientenbildung, Extrusion und — bisher unbekannt — eine Permutation des Ziels. Mit Quotientenbildung, wie auch durch Extrusion, gelangt man meist zu einer oft sehr erwünschten Problemverkleinerung. Extrusion wird i.a. nicht als separates Konstrukt aufgefasst, weil man Teilmengen stets zusammen mit ihrer Obermenge sieht. Für eine Problemverkleinerung muss man aber die umfassende Menge wirklich „loswerden“.

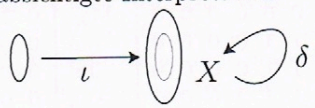
Extrusion: Es sei ein Kategorieobjekt gegeben und darin eine nichtleere **Teilmenge** oder auch eine **partielle Identitätsrelation** δ. Dann wird **jede** Relation ι dorthin eine **natürliche Extrusion** genannt, falls sie folgendes erfüllt:

$$\iota^{\mathsf{T}} ; \iota = \delta, \qquad \iota ; \iota^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}.$$

Syntax

```
Extrude delta
Inject  delta
```

beabsichtigte Interpretation



Wir sehen zunächst, dass wir dafür noch keine Standardnotation haben. Extrusion ist vor allem dann wichtig, wenn man unter etwa 2^{16} Teilmengen mühsam vielleicht 27 anhand einer speziellen Eigenschaft heraus gefiltert hat, und nur noch diese behandeln will; d.h. ohne jeden Bezug auf die vielen anderen. Es geht um „Converting a subset to a first class citizen“.

Man wundere sich nicht, dass „nichtleer“ gefordert wird. Mancher Kategoriker würde sich entschließen, diese Zusatzforderung fallen zu lassen. Aber: Dieser Fall muss bei jeder praktischen Anwendung ohnehin abgeprüft werden; warum dann nicht gleich eingangs, bevor man weiteres damit anstellt.

Das Beispiel zeigt zwei Extrusionen der Nicht-Bilder im Skatspiel. Man sieht, dass beidesmal genau *Bube, Dame, König* nicht als Bild auftreten.

$$
\begin{array}{c}
\\ A\rightarrow \\ 10\rightarrow \\ 9\rightarrow \\ 8\rightarrow \\ 7\rightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A & K & D & B & 10 & 9 & 8 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ V \\ W \\ X \\ Y \\ Z
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A & K & D & B & 10 & 9 & 8 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ V \\ W \\ X \\ Y \\ Z
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A\rightarrow & 10\rightarrow & 9\rightarrow & 8\rightarrow & 7\rightarrow \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Mit dem syntaktischen Material der beiden angebotenen Lösungen bilden wir die Permutation $P := \iota' ; \iota^{\mathsf{T}}$; sie zeigt den Übergang

$$P ; \iota = \iota' ; \iota^{\mathsf{T}} ; \iota = \iota' ; \delta = \iota' ; \iota'^{\mathsf{T}} ; \iota' = \iota'.$$

Wenn zwei syntaktisch unterschiedliche `delta` vorliegen, bei denen sich später gleiche Interpretation herausstellen sollte, sind diese Extrusionen zunächst einmal als verschieden anzusehen.

Quotientenbildung: Es sei ein Kategorieobjekt gegeben und darauf eine **Äquivalenz** Ξ. Dann wird **jede** dort startende Relation η eine **natürliche Projektion** genannt, falls sie folgendes erfüllt:

$$\eta ; \eta^{\mathsf{T}} = \Xi, \qquad \eta^{\mathsf{T}} ; \eta = \mathbb{I}.$$

Syntax	beabsichtigte Interpretation
`QuotMod xi`	X/Ξ
`Project xi`	$\eta : X \longrightarrow X/\Xi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\Xi"] \arrow[r, "\eta"'] & X/\Xi \end{tikzcd}$$

$$
\begin{array}{c}
\\ \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{Mar} \\ \text{Apr} \\ \text{May} \\ \text{Jun} \\ \text{Jul} \\ \text{Aug} \\ \text{Sep} \\ \text{Oct} \\ \text{Nov} \\ \text{Dec}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} \text{Jan} & \text{Feb} & \text{Mar} & \text{Apr} & \text{May} & \text{Jun} & \text{Jul} & \text{Aug} & \text{Sep} & \text{Oct} & \text{Nov} & \text{Dec} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{Mar} \\ \text{Apr} \\ \text{May} \\ \text{Jun} \\ \text{Jul} \\ \text{Aug} \\ \text{Sep} \\ \text{Oct} \\ \text{Nov} \\ \text{Dec}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} [\text{Jan}] & [\text{Apr}] & [\text{Jun}] & [\text{Sep}] \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1&0&0&0\\
1&0&0&0\\
1&0&0&0\\
0&1&0&0\\
0&1&0&0\\
0&0&1&0\\
0&0&1&0\\
0&0&1&0\\
0&0&0&1\\
0&0&0&1\\
0&0&0&1\\
1&0&0&0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{Mar} \\ \text{Apr} \\ \text{May} \\ \text{Jun} \\ \text{Jul} \\ \text{Aug} \\ \text{Sep} \\ \text{Oct} \\ \text{Nov} \\ \text{Dec}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \text{Summer} & \text{Autumn} & \text{Winter} & \text{Spring} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0&0&1&0\\
0&0&1&0\\
0&0&1&0\\
0&0&0&1\\
0&0&0&1\\
1&0&0&0\\
1&0&0&0\\
1&0&0&0\\
0&1&0&0\\
0&1&0&0\\
0&1&0&0\\
0&0&1&0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Angegeben ist eine Äquivalenz Ξ und dafür zwei Projektionen η, η'. Wie schon bisher liefert das mit den beiden Versionen vorgelegte syntaktische Material sofort die Möglichkeit, $P := \eta^{\mathsf{T}} ; \eta'$ zu definieren, das $\eta ; P = \eta'$ erfüllt.

Ziel-Permutation: Es sei eine **bijektive Abbildung** φ gegeben (und damit möglicherweise zwei Kategorieobjekte). Unter Einbeziehung der Anordnung der Quelle wird **jene eindeutig bestimmte** Relation P die **Zielpermutation** genannt, die die Relation als partielle Diagonale erscheinen läßt.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{US} & \text{French} & \text{German} & \text{British} & \text{Spanish} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{French} & \text{US} & \text{British} & \text{Spanish} & \text{German} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \text{US} \\ \text{French} \\ \text{German} \\ \text{British} \\ \text{Spanish} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{French} & \text{US} & \text{British} & \text{Spanish} & \text{German} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi \qquad\qquad \varphi;P \qquad\qquad P$$

Als Matrix — nicht jedoch als Relation — ist P die Transponierte von φ. Von der Quelle von φ geht nur die Anordnung ihrer Elemente ein.

Syntax	beabsichtigte Interpretation	
`PermTgt phi`	$X \xrightarrow[\varphi]{} Y$	permutiert zur Diagonalen
`ReArrTo phi`		

Hierauf stützt sich der ganze Aufbau einer algebraischen Visualisierung in [BS07].

3.4 Interpretation der dependent types

Wie bisher stützen wir uns auf die Auswahl einer Möglichkeit und die **universelle** Konstruktion **bis auf Isomorphie**. Wir wissen noch nicht, ob tatsächlich

- — Ξ eine Äquivalenz,
- — δ eine partielle Identität, entsprechend einer Teilmenge,
- — φ eine Bijektion ist.

Die Prüfung auf syntaktische Korrektheit erfordert die Verwaltung von **Beweisverpflichtungen**, die erst nach einer Interpretation überprüft werden können.

Literatur

BS07. Rudolf Berghammer and Gunther Schmidt. Algebraic Visualization of Relations Using RelView. In Victor G. Ganzha, Ernst W. Mayr, and Evgenii V. Vorozhtsov, editors, *Computer Algebra in Scientific Computing, 10th Int. Workshop, CASC 2007, Bonn, Germany, September 16-20, 2007, Proceedings*, volume 4770 of *Lect. Notes in Comput. Sci.*, pages 58–72. Springer-Verlag, 2007.

Sch03. Gunther Schmidt. Relational Language. Technical Report 2003-05, Fakultät für Informatik, Universität der Bundeswehr München, 2003. 101 pages, `http://homepage.mac.com/titurel/Papers/LanguageProposal.html`.

Sch11. Gunther Schmidt. *Relational Mathematics*, volume 132 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-0-521-76268-7, 584 pages.

SS89. Gunther Schmidt and Thomas Ströhlein. *Relationen und Graphen*. Mathematik für Informatiker. Springer-Verlag, 1989. ISBN 3-540-50304-8, ISBN 0-387-50304-8.

SS93. Gunther Schmidt and Thomas Ströhlein. *Relations and Graphs — Discrete Mathematics for Computer Scientists*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1993. ISBN 3-540-56254-0, ISBN 0-387-56254-0.