

# Ein kontinuierliches Modell für Kraftfahrzeugströmungen

Von

G. Schmidt, München

Mit 7 Abbildungen

(Eingegangen am 2. Juli 1969)

## Zusammenfassung — Summary

**Ein kontinuierliches Modell für Kraftfahrzeugströmungen.** Die Beschreibung des Kraftfahrzeugverkehrs in mathematischer Form ist mehrfach versucht worden. Es lassen sich zwei Typen von Ansätzen unterscheiden: Die diskreten Fahrzeugfolge-theorien gehen von einem Differentialgleichungssystem für die Bahnkurven  $x_n(t)$  der einzelnen Fahrzeuge aus. Die kontinuierlichen Strömungsmodelle verlangen die Lösung einer partiellen Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit  $v(x, t)$  sowie die Ermittlung der Trajektorien  $x(t; c)$  im so entstandenen Geschwindigkeitsfeld, die als Bahnkurven der Fahrzeuge interpretiert werden. In der vorliegenden Arbeit werden für ein kontinuierliches Modell die genannten Integrationen bei allgemeinen Anfangs- und Randbedingungen geschlossen durchgeführt. Daran schließt sich die Behandlung eines Spezialfalles an, aus dem sich ein flexibles graphisches Verfahren zur Lösung von Kraftfahrzeugströmungsproblemen gewinnen läßt. Als Beispiel einer Anwendung wird ein im Verkehr häufig auftretender Effekt mit Hilfe dieser Theorie graphisch untersucht.

**A Continuous Model for the Solution of Traffic Flow Problems.** Mathematical description of traffic flow has been tried repeatedly. Two types of theories are to be distinguished: Discrete traffic flow theories start from a system of differential equations for functions  $x_n(t)$  describing the routes of single cars. Continuous flow models require solution of a partial differential equation for the velocity  $v(x, t)$  and determination of trajectories  $x(t; c)$  of the velocity field thus obtained. In this paper these integrations for general initial and boundary conditions of a continuous flow model are performed. Treatment of a special case is added, yielding a flexible graphic method for solution of traffic flow problems. As an example of application, a frequently occurring traffic situation is analysed with this theory.

## 1. Definition des kontinuierlichen Modells

Ausgegangen wird von einer idealen Fahrzeugfolge. Dabei heißt eine Fahrzeugfolge ideal, wenn die Geschwindigkeit  $v$  eines Fahrzeugs eindeutig bestimmt ist durch den Abstand  $a$  zum vorausfahrenden Fahrzeug. Diese Abhängigkeit sei gegeben als Umkehrung einer stetig differenzierbaren monoton wachsenden Funktion  $a(v)$ .

Das kontinuierliche Modell für die ideale Fahrzeugfolge ist eine ein-dimensionale Strömung, welche durch Geschwindigkeit  $v(x, t)$  und Dichte  $\rho(x, t)$  beschrieben wird, die den folgenden Beziehungen genügen:

Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + v \cdot \rho_x + \rho \cdot v_x = 0, \quad (1)$$

Dichte-Geschwindigkeits-Beziehung

$$\varrho = \frac{1}{a(v)}. \quad (2)$$

Mit Hilfe von  $\varrho_t = \frac{-1}{(a(v))^2} \cdot a'(v) \cdot v_t$  und  $\varrho_x = \frac{-1}{(a(v))^2} \cdot a'(v) \cdot v_x$  gelangt man zu einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für  $v(x, t)$ :

$$v_t + v_x \cdot \left( v - \frac{a(v)}{a'(v)} \right) = 0. \quad (3)$$

Um die Lösung der partiellen Differentialgleichung angeben zu können, benötigt man ferner eine Anfangsbedingung

$$v(X, 0) = V(X), \quad (4)$$

die den Zustand der Strömung zur Zeit  $t = 0$  beschreibt, und eine Randbedingung. Ist  $X(T)$  die Bahnkurve des führenden Wagens, so nimmt man als Randbedingung die Führungsbedingung

$$v(X(T), T) = \dot{X}(T). \quad (5)$$

## 2. Integration der Differentialgleichung

Durch eine LEGENDRE-Transformation geht die partielle Differentialgleichung (3) in eine elementar integrierbare Form über.

Mit  $\varphi(x, t)$  werde das zeitlich veränderliche Geschwindigkeitspotential für  $v(x, t)$  bezeichnet; d. h.  $v = \varphi_x$ . Setzt man  $q := \varphi_t$ , so gilt

$$d\varphi = v \cdot dx + q \cdot dt.$$

Führt man  $f(v, t) := x \cdot v - \varphi$  als Funktion der neuen unabhängigen Veränderlichen  $v$  und  $t$  ein, so folgt

$$\begin{aligned} df &= x dv + v dx - d\varphi \\ &= x dv - q dt; \end{aligned}$$

also ist  $x = f_v$  und  $q = -f_t$ .

Wegen  $dx = f_{vv} dv + f_{vt} dt$  gilt ferner

$$dv = \varphi_{xx} dx + \varphi_{xt} dt = \varphi_{xx} (f_{vv} dv + f_{vt} dt) + \varphi_{xt} dt.$$

Durch den Koeffizientenvergleich

$$1 = \varphi_{xx} \cdot f_{vv}, \quad 0 = \varphi_{xx} f_{vt} + \varphi_{xt}$$

erhält man die Beziehungen

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{f_{vv}} \quad \text{und} \quad \varphi_{xt} = \frac{-f_{vt}}{f_{vv}},$$

welche, in die Differentialgleichung (3) eingesetzt,

$$\frac{-f_{vt}}{f_{vv}} + \frac{1}{f_{vv}} \cdot \left( v - \frac{a(v)}{a'(v)} \right) = 0$$

liefern.

Die so entstandene partielle Differentialgleichung für  $f(v, t)$

$$f_{vt} = v - \frac{a(v)}{a'(v)}$$

enthält die Veränderliche  $t$  auf der rechten Seite nicht und besitzt daher die allgemeine Lösung

$$f_v = \left( v - \frac{a(v)}{a'(v)} \right) \cdot t + g(v)$$

mit einer beliebigen Funktion  $g(v)$ .

Damit ist die Integration der Differentialgleichung (3) erreicht; denn es gilt  $x = f_v$ , und durch

$$x = \left( v - \frac{a(v)}{a'(v)} \right) \cdot t + g(v) \quad (6)$$

ist das gesuchte Geschwindigkeitsfeld  $v(x, t)$  in impliziter Form gegeben.

### 3. Diskussion des Geschwindigkeitsfeldes

Ist durch Anfangsbedingung (4) oder Führungsbedingung (5) die Funktion  $g(v)$  festgelegt, so stellt Gl. (6) in der Form

$$x = \left( \dot{x} - \frac{a(\dot{x})}{a'(\dot{x})} \right) \cdot t + g(\dot{x}) \quad (7)$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Trajektorien  $x(t; c)$  des Geschwindigkeitsfeldes (6) dar.

Die Isoklinen  $\dot{x} = v = \text{const}$  in der  $(x, t)$ -Ebene sind Gerade mit einer Steigung

$$m(v) := v - \frac{a(v)}{a'(v)}, \quad (8)$$

welche stetig von  $v$  abhängt, sofern  $a(v)$  stetig differenzierbar ist. Setzt man sogar voraus, daß bis auf endlich viele Sprungstellen  $a''(v)$  stetig und positiv ist, so ist

$$m' = \frac{a(v) \cdot a''(v)}{(a'(v))^2} \quad (9)$$

positiv, und die Isoklinensteigung  $m(v)$  wächst daher monoton mit  $v$ .

Eine wichtige Größe ist die Flußdichte  $M(v) := \rho \cdot v = \frac{v}{a(v)}$ . Ihre Ableitung lautet

$$M' = \frac{-1}{(a(v))^2} \{ v \cdot a'(v) - a(v) \} = \frac{-a'(v)}{(a(v))^2} \cdot \left\{ v - \frac{a(v)}{a'(v)} \right\}.$$

Die Flußdichte ist also genau für diejenige Geschwindigkeit maximal, für die die Isoklinensteigung  $m(v)$  verschwindet. Es gibt höchstens eine solche Geschwindigkeit  $v_{\max}$ , weil  $m(v)$  monoton und  $\frac{-a'(v)}{(a(v))^2}$  stets negativ ist.

Eine Möglichkeit, sich über den Zusammenhang von  $v$  und  $m(v)$  eine qualitative Vorstellung zu verschaffen, bietet die  $M(v) - \varrho(v)$ -Kurve mit  $v$  als Kurvenparameter.

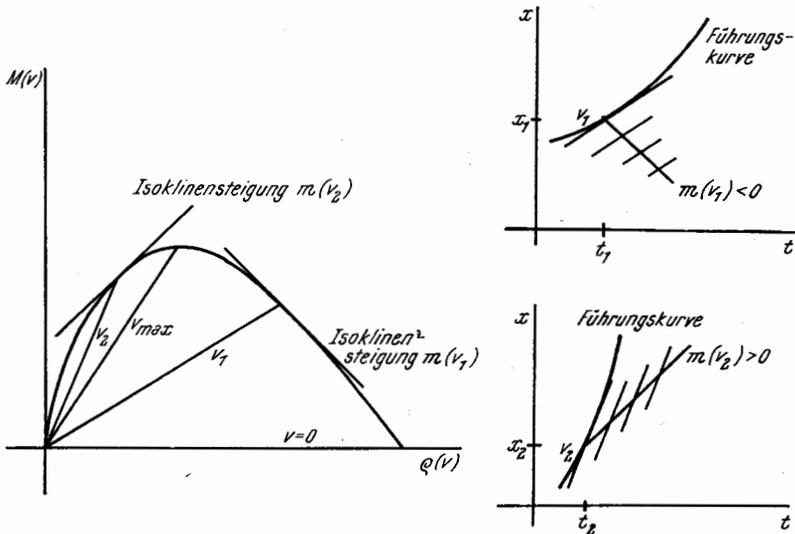


Abb. 1. LIGHTHILLSches Fundamentaldiagramm

Dieses Diagramm wird von LIGHTHILL Fundamentaldiagramm genannt. Zu jedem Punkt  $(\varrho, M)$  der Kurve erhält man den Parameterwert  $v$  als Steigung des Ortsvektors. Die zum Parameterwert  $v$  gehörige Isoklinensteigung  $m(v)$  stimmt überein mit der Kurvensteigung  $\frac{dM}{d\varrho}$ :

$$\frac{dM}{d\varrho} = \frac{M'}{\varrho'} = v - \frac{a(v)}{a'(v)} = m(v).$$

Im Falle  $v_1 < v_{\max}$  ist  $m(v_1)$  negativ und für  $v_2 > v_{\max}$  ist  $m(v_2)$  positiv. Fährt nun der führende Wagen zur Zeit  $t_i$  an der Stelle  $x_i$  mit der Geschwindigkeit  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ), so pflanzt sich die Geschwindigkeit  $v_1$  ( $v_2$ ) mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $m(v_1)$  räumlich nach hinten (mit  $m(v_2)$  nach vorne) fort. Die Geschwindigkeit  $v_{\max}$  bildet den Grenzfall. Auch alle folgenden Wagen würden die betreffende Stelle mit der Geschwindigkeit  $v_{\max}$  durchfahren, weil  $m(v_{\max}) = 0$  ist.

#### 4. Integration der Differentialgleichung im Bestimmtheitsbereich einer Führungskurve

Neben der Differentialgleichung (7) sei die Führungsbedingung (5) gegeben mit einer monoton steigenden glatten Funktion  $X(T)$ , die bis auf endlich viele Ausnahmestellen eine positive stetige zweite Ableitung besitzt.

Durch die Kurve  $X(T)$  und die beiden Isoklinen am Anfangs- und Endpunkt der Kurve ist der sogenannte Bestimmtheitsbereich abgegrenzt.

Wegen der Monotonie von  $X(T)$  sowie wegen der Monotonie von  $\dot{X}(T)$  in Verbindung mit (9) wird der Bestimmtheitsbereich durch die von der Kurve ausgehenden Isoklinen schlicht überdeckt.

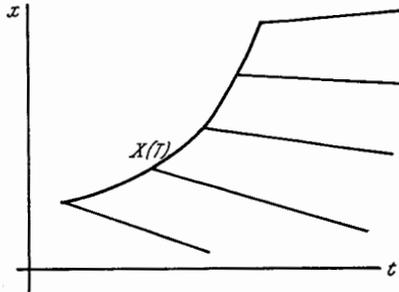


Abb. 2. Schlicht überdeckter Bestimmtheitsbereich

Die Gleichungen dieser Isoklinen mit  $T$  als Scharparameter lauten nach (8)

$$F(x, t, T) := x - X(T) - (t - T) \cdot \left\{ \dot{X}(T) - \frac{a(\dot{X}(T))}{a'(\dot{X}(T))} \right\} = 0. \quad (10)$$

Bildet man die Ableitung

$$F_T(x, t, T) = -\dot{X} + \left( \dot{X} - \frac{a}{a'} \right) - (t - T) \left( \ddot{X} - \frac{a'^2 - a a''}{a'^2} \cdot \ddot{X} \right) = 0, \quad (11)$$

so läßt sich aus (10) und (11) die folgende Parameterdarstellung für die Einhüllende der Isoklinen gewinnen:

$$t = T - \frac{a'(\dot{X}(T))}{a''(\dot{X}(T)) \cdot \ddot{X}(T)} =: \varphi(T),$$

$$x = X(T) - \frac{a'(\dot{X}(T))}{a''(\dot{X}(T)) \cdot \ddot{X}(T)} \cdot \left\{ \dot{X}(T) - \frac{a(\dot{X}(T))}{a'(\dot{X}(T))} \right\} =: \psi(T). \quad (12)$$

Mit Hilfe von (12) wird es möglich, die gewöhnliche Differentialgleichung (7), die eine noch nicht bekannte Funktion  $g$  enthält, wie folgt zu ersetzen:

Jeder Punkt  $P = (t, x)$  des Bestimmtheitsbereiches kann mit den zwei Parametern  $\lambda$  und  $T$  dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad t &= \varphi(T) + \lambda \\ \text{(II)} \quad x &= \psi(T) + \lambda \cdot m(\dot{X}(T)). \end{aligned} \quad (12a)$$

Dabei ist  $m(\dot{X}(T))$  die Steigung der zur Geschwindigkeit  $\dot{X}(T)$  im Punkt  $(T, X(T))$  gehörigen Isokline und demnach gleich der Steigung  $\frac{\dot{\psi}(T)}{\dot{\varphi}(T)}$  der Einhüllenden im Punkte  $(\varphi(T), \psi(T))$ .

Schließlich benötigt man die Beziehung

$$(III) \quad \frac{dx}{dt} = \dot{X}(T),$$

welche die Richtung der Integralkurve im Punkt  $P$  festlegt. Durch Elimination von  $\lambda$  erhält man aus den Gleichungen I, II, III:

$$\begin{aligned} x &= \psi(T) + (t - \varphi(T)) \cdot m(\dot{X}(T)) \\ dx &= \dot{X}(T) \cdot dt. \end{aligned} \quad (13)$$

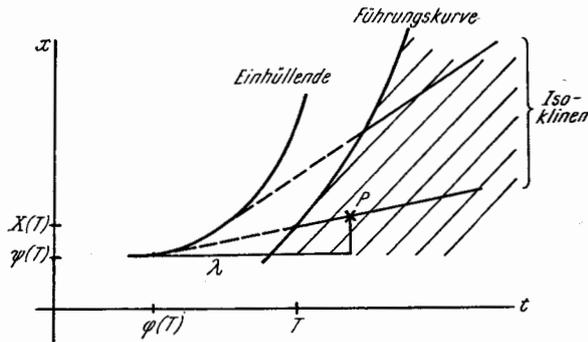


Abb. 3. Parametrisierung des Bestimmtheitsbereiches mit  $\lambda$  und  $T$

Daraus würde eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für  $x(t)$  entstehen, falls auch  $T$  eliminiert würde. Es ist jedoch möglich, (13) in der Weise geschlossen zu integrieren, daß sich die Integralkurven in Parameterform

$$\begin{aligned} t &= t(T, c) \\ x &= x(T, c) \end{aligned}$$

ergeben.

Zunächst folgt

$$\begin{aligned} dx &= \dot{\psi} dT + (dt - \dot{\varphi} dT) \cdot m + (t - \varphi) \cdot m' \cdot \ddot{X} dT \\ dx &= \dot{X} \cdot dt, \end{aligned}$$

woraus sich unter Berücksichtigung von  $m = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}$  die folgende lineare Differentialgleichung für  $t = t(T, c)$  ergibt:

$$\frac{dt}{dT} - \frac{m' \cdot \ddot{X}}{\dot{X} - m} \cdot t = - \frac{\varphi \cdot m' \cdot \ddot{X}}{\dot{X} - m}.$$

Setzt man die Funktionen  $m(\dot{X}(T))$  und  $\varphi(T)$  ein,

$$\frac{dt}{dT} - \frac{a''(\dot{X}(T))}{a'(\dot{X}(T))} \cdot \ddot{X}(T) \cdot t = 1 - T \cdot \frac{a''(\dot{X}(T))}{a'(\dot{X}(T))} \cdot \ddot{X}(T),$$

so liefert die Integration zusammen mit (13) als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7) für den Bestimmtheitsbereich

$$t = T + c \cdot a'(\dot{X}(T))$$

$$x = X(T) + c \cdot a'(\dot{X}(T)) \cdot \left\{ \dot{X}(T) - \frac{a(\dot{X}(T))}{a'(\dot{X}(T))} \right\}. \quad (14)$$

Für den Fall  $c = 0$  stimmt also die Integralkurve mit der Führungskurve überein. Die Nachführkurven ergeben sich für  $c > 0$ .

Ist die Führungskurve eine Gerade  $X(T) = X_0 + V_0 \cdot T$ , also  $\ddot{X}(T) \equiv 0$ , so sind die Integralkurven offensichtlich parallelverschobene Gerade. Trotz verletzter Voraussetzung bleiben die Gleichungen (14) auch für diesen Fall richtig.

### 5. Integration der Differentialgleichung im Bestimmtheitsbereich einer Anfangsbedingung

Es sei jetzt die Differentialgleichung (7) zusammen mit der Anfangsbedingung (4) gegeben.  $V(X)$  sei eine positive stetige Funktion, die bis auf endlich viele Stellen eine positive stetige Ableitung besitzt.

Dann wird der von der  $x$ -Achse und den Isoklinen im Anfangs- und Endpunkt des Definitionsintervalls von  $V(X)$  abgegrenzte Bestimmtheitsbereich von den Isoklinen schlicht überdeckt.

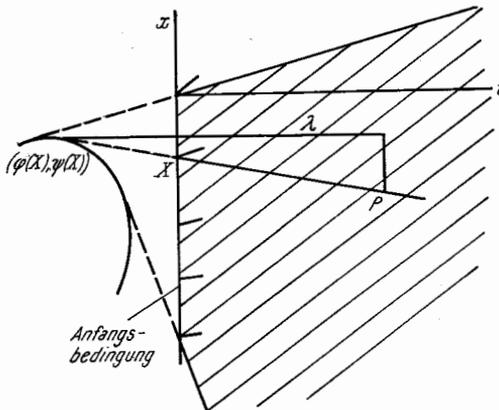


Abb. 4. Bestimmtheitsbereich einer Anfangsbedingung

Die Gleichungen der Isoklinen mit  $X$  als Scharparameter sind

$$F(t, x, X) := x - X - t \cdot m(V(X)) = 0,$$

woraus sich über die Ableitung

$$F_X(t, x, X) = -1 - t \cdot m' \cdot V' = 0$$

die Einhüllende der Isoklinen in Parameterdarstellung ergibt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-1}{m'(V(X)) \cdot V'(X)} =: \varphi(X), \\ x &= X - \frac{m(V(X))}{m'(V(X)) V'(X)} =: \psi(X). \end{aligned} \quad (15)$$

Die Punkte  $P = (t, x)$  des Bestimmtheitsbereiches lassen sich mit den beiden Parametern  $X$  und  $\lambda$  darstellen als

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad t &= \varphi(X) + \lambda \\ \text{(II)} \quad x &= \psi(X) + \lambda \cdot m(V(X)), \end{aligned}$$

wobei  $m(V(X))$  die Steigung der zur Geschwindigkeit  $V(X)$  im Punkte  $(0, X)$  gehörigen Isokline ist und mit der Steigung  $\frac{\varphi'(X)}{\psi'(X)}$  der Einhüllenden im Punkte  $(\varphi(X), \psi(X))$  übereinstimmt. Die Steigung der Integralkurve im Punkte  $P$  liefert

$$\text{(III)} \quad \frac{dx}{dt} = V(X).$$

Bei Elimination von  $\lambda$  gehen die Gleichungen I, II, III über in

$$\begin{aligned} x &= \psi(X) + (t - \varphi(X)) m(V(X)), \\ \frac{dx}{dt} &= V(X), \end{aligned} \quad (16)$$

woraus sich über

$$\begin{aligned} dx &= \psi' dX + (dt - \varphi' dX) \cdot m + (t - \varphi) \cdot m' \cdot V' \cdot dX \\ dx &= V \cdot dt \end{aligned}$$

die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung für  $t = t(X, c)$  ergibt.

$$\frac{dt}{dX} - \frac{m' V'}{V - m} \cdot t = - \frac{\varphi \cdot m' V'}{V - m}.$$

Nach Einsetzen der Funktionen  $m(V(X))$  und  $\varphi(X)$

$$\frac{dt}{dX} - \frac{a''(V(X))}{a'(V(X))} \cdot V'(X) \cdot t = \frac{a'(V(X))}{a(V(X))}$$

ergibt sich daraus in Verbindung mit (16) die allgemeine Lösung in Parameterform:

$$\begin{aligned} t &= a'(V(X)) \cdot \int_{X_0}^X \frac{d\xi}{a(V(\xi))}, \\ x &= X + a'(V(X)) \cdot \left\{ V(X) - \frac{a(V(X))}{a'(V(X))} \right\} \cdot \int_{X_0}^X \frac{d\xi}{a(V(\xi))}. \end{aligned} \quad (17)$$

Wegen  $\rho = \frac{1}{a}$  geben die Integrale die Gesamtzahl der Fahrzeuge zur Zeit  $t = 0$  im Intervall  $X_0, \dots, X$  an. Der Punkt in der  $(t, x)$ -Ebene, in dem ein im Punkt  $(0, X_0)$  mit der Geschwindigkeit  $V(X_0)$  gestartetes Fahrzeug die Geschwindigkeit  $V(X)$  erreicht, hängt von dieser Fahrzeuganzahl ab.

## 6. Verdichtungslinien und Verheftung von Bestimmtheitsbereichen

In den Abschnitten 4 und 5 war durch Bedingungen für  $X(T)$  bzw.  $V(X)$  dafür gesorgt, daß der Bestimmtheitsbereich von den Isoklinen **schlicht** überdeckt wurde, die Einhüllende der Isoklinen also außerhalb lag.

Jetzt sei vorausgesetzt, daß die monoton steigende glatte Funktion  $X(T)$  bis auf endlich viele Ausnahmestellen eine stetige *negative* zweite Ableitung besitzt. (Analog wäre der Fall einer stetigen Funktion  $V(X)$  mit einer stetigen *negativen* Ableitung zu behandeln.)

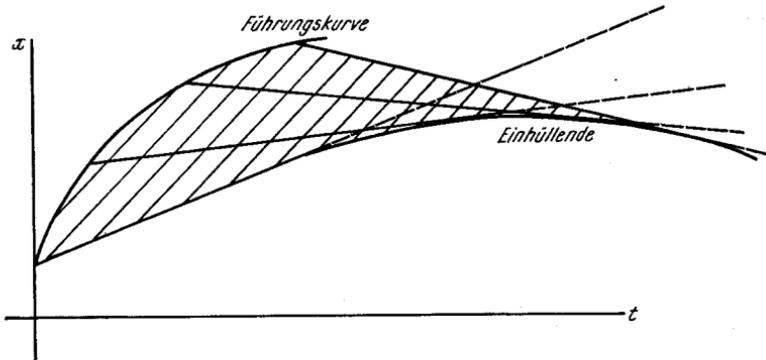


Abb. 5. Nicht schlicht überdeckter Bestimmtheitsbereich

Es entsteht ein Bereich, der von Isoklinen doppelt überdeckt wird, und in welchem die Funktion  $v(x, t)$  als Lösung von (3) und (5) zwei reelle Werte besitzt. Aus physikalischen Gründen ist von den zwei Isoklinen offenbar die zum späteren Zeitpunkt entstandene maßgebend. Dementsprechend liegt der Bestimmtheitsbereich zwischen der Führungskurve und der Einhüllenden sowie zwischen Anfangs- und Endisokline. Darin werden nur die Teile der Isoklinen betrachtet, die vor der Berührung mit der Einhüllenden liegen. Weiterhin stellen die Gleichungen (14) die allgemeine Lösung in Parameterform dar:

$$t = T + c \cdot a'(\dot{X}(T))$$

$$x = X(T) + c \cdot a'(\dot{X}(T)) \cdot \left\{ \dot{X}(T) - \frac{a(\dot{X}(T))}{a'(\dot{X}(T))} \right\}.$$

Damit diese Nachführkurven im Bestimmtheitsbereich liegen, muß neben  $c \geq 0$  in (12a) die Bedingung  $\lambda < 0$  erfüllt sein.

Aus

$$\lambda = t - \varphi(T) < 0$$

folgt durch Einsetzen

$$T + c \cdot a'(\dot{X}(T)) - T + \frac{a'(\dot{X}(T))}{a''(\dot{X}(T)) \cdot \ddot{X}(T)} < 0$$

und daraus die Bedingung

$$0 \leq c < -\frac{1}{a''(\dot{X}(T)) \cdot \ddot{X}(T)} \quad (18)$$

für  $c$  und  $T$ .

Auch aus einer anderen Überlegung heraus gelangt man zu diesem Ergebnis. Offenbar kann im Bestimmtheitsbereich die Beschleunigung  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  nur negativ sein.

Nun ist

$$\frac{dx}{dt} = \dot{X}(T) \quad \text{ sowie } \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\dot{X}}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{\ddot{X}}{i},$$

woraus wegen

$$i = 1 + c \cdot a''(\dot{X}(T)) \cdot \ddot{X}(T)$$

im Falle

$$\ddot{X}(T) < 0$$

folgt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + c \cdot a'' \cdot \ddot{X} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{-1}{a''(\dot{X}(T)) \cdot \ddot{X}(T)}.$$

Mit Hilfe von (17) ergibt sich eine analoge Bedingung für den Bestimmtheitsbereich einer Anfangsbedingung mit  $V'(X) < 0$ . Es gilt

$$\frac{dx}{dt} = V(X), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dX} \cdot \frac{dX}{dt} = V' \cdot \frac{1}{t'}$$

und

$$t' = a''(V(X)) \cdot V'(X) \int_{X_0}^X \frac{d\xi}{a(V(\xi))} + a'(V(X)) \cdot \frac{1}{a(V(X))}.$$

Damit lautet die Bedingung für  $X$  und  $X_0$

$$\int_{X_0}^X \frac{d\xi}{a(V(\xi))} < -\frac{a'(V(X))}{a(V(X)) \cdot a''(V(X)) \cdot V'(X)}. \quad (19)$$

Es sei jetzt ein allgemeines Anfangs- und Randwertproblem vorgelegt mit Funktionen  $V(X)$  und  $X(T)$ , die den geforderten Bedingungen genügen, und es sei  $V = \dot{X}$  an der Stelle  $X = T = 0$ .

Anfangs- und Führungsbedingung können in Monotonieintervalle für  $V(X)$  bzw.  $\dot{X}(T)$  zerlegt werden, woraus sich eine Zerlegung des betrachteten Bereiches der  $(t, x)$ -Ebene in Bestimmtheitsbereiche ergibt.

Als Grenzen der Bestimmtheitsbereiche treten neben der Anfangszeit  $t = 0$ , den Führungskurvenabschnitten und den zugehörigen Anfangs- und Endisoklinen noch sogenannte *Verdichtungslinien* auf. Sie entstehen immer dann, wenn sich zwei Bestimmtheitsbereiche überlappen und geben an, wo der eine aufhört, und wo der nächste beginnt. Für die Integralkurven bedeutet der Durchgang durch eine Verdichtungslinie einen stetigen Übergang mit Geschwindigkeitssprung und folglich auch einem Dichtesprung.

## 7. Graphisches Lösungsverfahren

Die einfachste Funktion  $a(v)$ , welche für  $v \geq 0$  zusammen mit ihren ersten beiden Ableitungen positiv ist, ist ein quadratisches Polynom mit positiven Koeffizienten

$$a(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2. \quad (20)$$

Entsprechend wird auch als Führungskurve  $X(T)$  ein Polynom vom Grad 2 gewählt:

$$X(T) = A_0 + A_1 T + A_2 T^2.$$

Unter diesen Voraussetzungen entartet die Einhüllende (12) der Isoklinen in einen Punkt

$$\begin{aligned} t &= -\frac{a_1 + 2 a_2 A_1}{4 \cdot a_2 \cdot A_2}, \\ x &= A_0 + \frac{a_0 - a_2 A_1^2}{4 \cdot a_2 \cdot A_2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Parameterdarstellungen der Nachführkurven lassen sich mit Hilfe von (14) angeben

$$\begin{aligned} t &= c(a_1 + 2 a_2 \cdot A_1) + T \cdot (1 + 4 a_2 \cdot A_2 \cdot c) \\ x &= A_0 + c(a_2 A_1^2 - a_0) + A_1 \cdot T \cdot (1 + 4 a_2 \cdot A_2 \cdot c) + \\ &\quad + T^2 \cdot A_2 \cdot (1 + 4 a_2 \cdot A_2 \cdot c). \end{aligned} \quad (22)$$

Wählt man den Isoklinenschnittpunkt (21) als Bezugspunkt und setzt

$$\begin{aligned} \xi &:= t + \frac{a_1 + 2 a_2 \cdot A_1}{4 a_2 \cdot A_2}, \\ \eta &:= x - A_0 - \frac{a_0 - a_2 A_1^2}{4 a_2 \cdot A_2} \end{aligned}$$

sowie

$$D := 1 + 4 a_2 \cdot A_2 \cdot c,$$

so geht (22) über in

$$\begin{aligned} \xi &= D \cdot \left( T + \frac{a_1 + 2 a_2 A_1}{4 a_2 \cdot A_2} \right), \\ \eta &= D A_2 \cdot \left( T + \frac{A_1}{2 A_2} \right)^2 - \frac{D a_0}{4 a_2 \cdot A_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Elimination führt auf die geschlossene Form

$$\eta + \frac{D a_0}{4 a_2 \cdot A_2} = \frac{A_2}{D} \cdot \left( \xi - \frac{D a_1}{4 a_2 \cdot A_2} \right)^2, \quad (24)$$

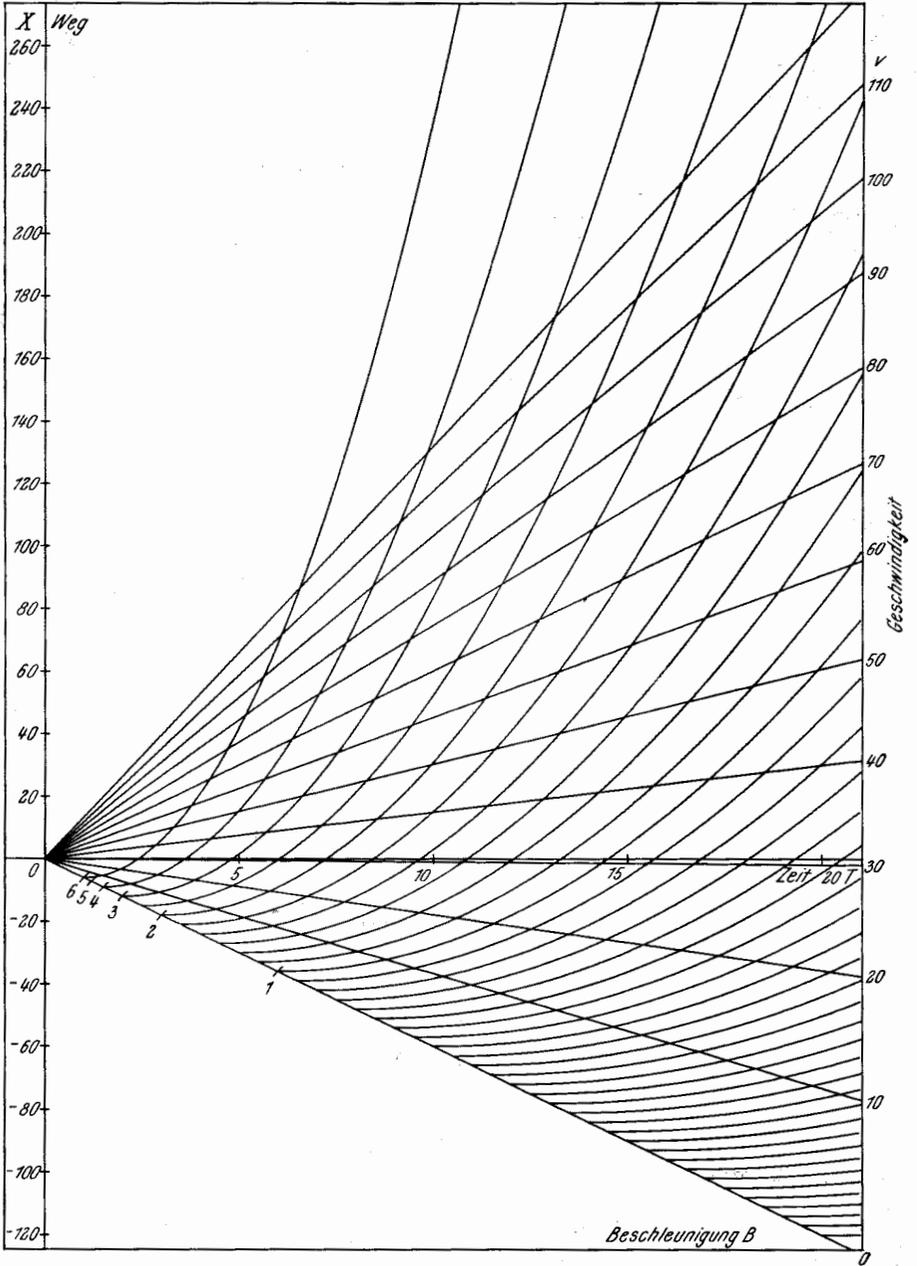


Abb. 6. Nachführkurvendiagramm für  $a(v) = 6 + v + \frac{1}{12} v^2$

die eine Schar von Parabeln darstellt, deren Scheitelpunkte auf der Geraden  $\eta = -\frac{a_0}{a_1} \cdot \xi$  durch den Isoklinenschnittpunkt liegen. Für  $A_2 = 0$  sind in der Schar alle Öffnungsparameter  $-\infty < \frac{A_2}{D} < 0$  bzw.  $0 < \frac{A_2}{D} < +\infty$  vertreten, wenn  $c$  den Bereich

$$-\infty < c < \frac{-1}{4 a_2 \cdot A_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{-1}{4 a_2 \cdot A_2} < c < +\infty$$

durchläuft. Durch  $c \rightarrow -c - \frac{1}{2 a_2 \cdot A_2}$  geht  $\frac{A_2}{D}$  in  $-\frac{A_2}{D}$  über. Die beiden Teile der Schar sind kongruent und um  $180^\circ$  gegeneinander gedreht. Die Parameter  $A_0$  und  $A_1$  treten in Gleichung (24) nicht mehr auf.

Die Tatsachen, daß neben der Führungsparabel  $X(T) = A_0 + A_1 T - A_2 T^2$  auch die Nachführkurven Parabeln sind, und daß bis auf Translation in der Schar (24) alle Parabeln vorkommen, gestatten die Einführung eines einfachen graphischen Verfahrens zur Ermittlung von Näherungslösungen der Differentialgleichung (3). Man benötigt dazu für die fest gegebene Funktion  $a(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2$  ein Diagramm mit der Parabelschar (24). Dieses Diagramm wird universell verwendbar, wenn man die Führungskurve  $X(T)$  in die Monotonieintervalle aus Abschnitt 6 zerlegt, darin durch glatt anschließende Parabeln approximiert und dann durch Anlegen der jeweils passenden Parabel des Diagrammes den Bestimmtheitsbereich und die Nachführkurven ermittelt. Um ein kongruentes Parabelstück im Diagramm zu finden, sucht man zweckmäßig zunächst ein berührendes Parabelstück und verschiebt dann das Diagramm längs der zur Berührungssteigung gehörigen Isokline, wobei die Berührung erhalten bleibt, bis zur Deckung der vorgelegten Parabel mit einer Diagrammparabel. Abb. 6 zeigt das Nachführkurven-Diagramm für  $a(v) = 6 + v + \frac{1}{12} v^2$ .

Die Beschränkung von  $a(v)$  auf quadratische Polynome kann fallen gelassen werden, wenn man ein beliebiges  $a(v)$  durch glatt anschließende Parabeln approximiert und das Diagramm zwischen den Isoklinen der Grenzgeschwindigkeiten jeweils wie bisher zeichnet. Nach (9) ist garantiert, daß der Übergang der Nachführkurven über die Grenzisoklinen glatt erfolgt.

## 8. Ein Anwendungsbeispiel

Es sei eine ideale Fahrzeugkolonne gegeben, deren führender Wagen aus dem Stand heraus beschleunigt und auf eine Ampel zufährt. Zwei Fahrweisen des führenden Wagens werden einander gegenübergestellt.

a) Die Kolonne fährt schnell auf die Ampel, die noch Rot anzeigt, zu und muß bis zum Stand abbremsten. Sobald die Ampel auf Grün umspringt, fährt die Kolonne wieder an (gestrichelte Linien).

b) In richtiger Einschätzung der Ampelphase beschleunigt die Kolonne gerade so, daß der führende Wagen die auf Grün springende Ampel genau mit der Geschwindigkeit  $v_{\max}$  passiert (durchgezogene Linien).

Mit Hilfe des Nachführkurvendiagramms läßt sich in beiden Fällen der Durchsatz für die Grünphase der Ampel ermitteln. Offensichtlich kann im Falle b) ein wesentlich größerer Fahrzeugstrom bei gleich langer Grünphase die Ampel passieren als im Falle a). Der Grund liegt darin, daß die Flußdichte  $M(v)$  bei der Geschwindigkeit  $v_{\max}$  ihr Maximum annimmt und zusätzlich der Vorteil besteht, daß die zu  $v_{\max}$  gehörige Isokline horizontal verläuft, also *alle* Wagen der Kolonne b) die Ampel mit  $v_{\max}$  passieren. Im Falle a) dagegen entsteht eine Stillstandszone, die sich in der Kolonne längs der zu  $v = 0$  gehörigen Isokline rückwärts bewegt. Weil die Fahrzeuge erst wieder aus dem Stand beschleunigen müssen, also eine gewisse Zeit ihre Geschwindigkeiten  $v$  zwischen 0 und  $v_{\max}$  liegen, ist die zugehörige Flußdichte  $M(v)$  kleiner als  $M(v_{\max})$ .

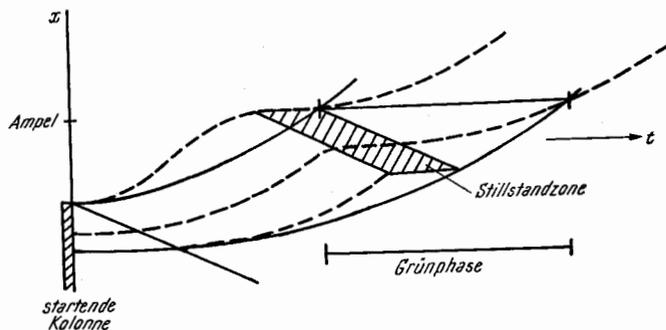


Abb. 7. Anwendungsbeispiel

Das graphische Verfahren bietet also die Möglichkeit, **Effekte**, die im heutigen Verkehr ständig auftreten, zu untersuchen. Die **Schlüsse**, die gezogen werden können, sind von zweierlei Art. Einmal kann die **Führung** des Verkehrsflusses in einer Straße durch Ampel- und Vorampelschaltungen simuliert werden, und zum anderen kann man Hinweise für erstrebenswertes Fahrverhalten (siehe oben Fall b) gewinnen.

#### Literatur

- [1] LEUTZBACH, W. und St. BEXELIUS: Probleme der Kolonnenfahrt, Forschungsberichte des Bundesverkehrsministeriums, Heft 44 (1966).
- [2] LIGHTHILL, M. J. and G. B. WHITHAM: On Kinematic Waves I, II, Proc. of the Royal Soc. Series A, 229, p. 281 und p. 317 (1955).

Dr. Gunther Schmidt  
Mathematisches Institut  
der Technischen Universität München  
Arcisstraße 21, D-8 München 2  
Bundesrepublik Deutschland