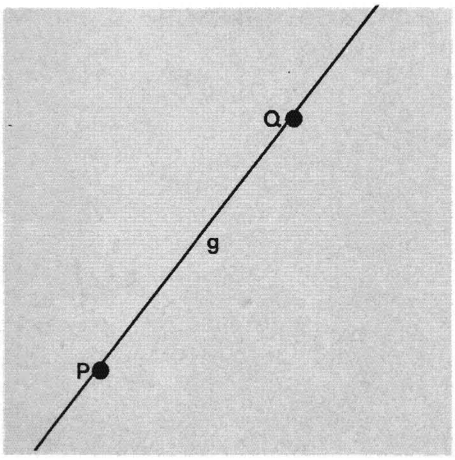
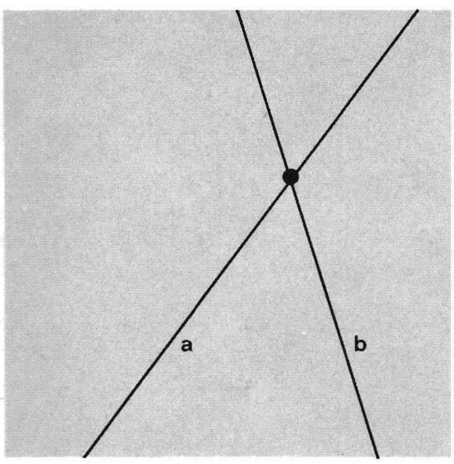
# DAS MATHEMATISCHE KABINETT

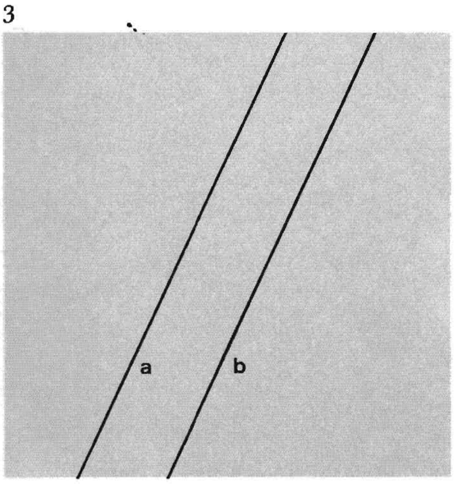



1




2

3




*Die zwei Parallelen*

*Es gingen zwei Parallelen*
*ins Endlose hinaus,*
*zwei kerzengerade Seelen*
*und aus solidem Haus.*

*Sie wollten sich nicht schneiden*
*bis an ihr seliges Grab:*
*Das war nun einmal der beiden*
*geheimer Stolz und Stab.*

*Doch als sie zehn Lichtjahre*
*gewandert neben sich hin,*
*da ward's dem einsamen Paare*
*nicht irdisch mehr zu Sinn.*

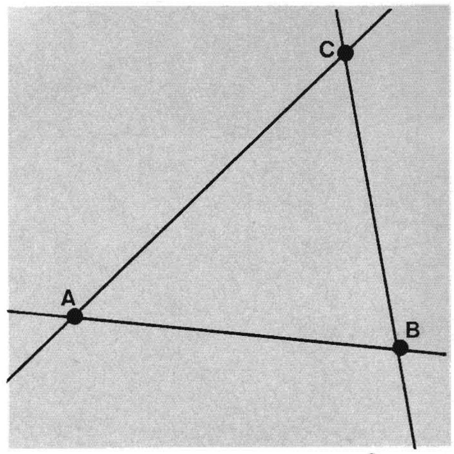
*War'n sie noch Parallelen?*
*Sie wußtens selber nicht –*
*sie flossen nur wie zwei Seelen*
*zusammen durch ewiges Licht.*

*Das ewige Licht durchdrang sie,*
*da wurden sie eins in ihm;*
*die Ewigkeit verschlang sie*
*als wie zwei Seraphim.*

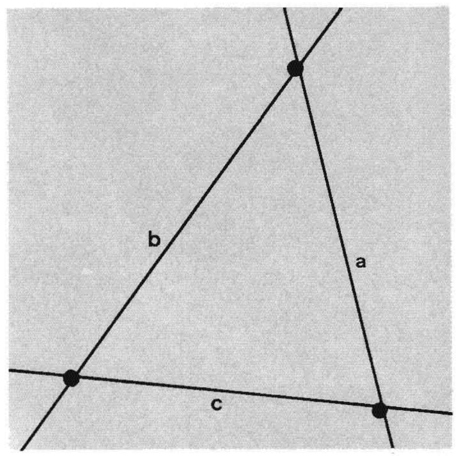
*Christian Morgenstern*

## Geometrie im Unendlichen

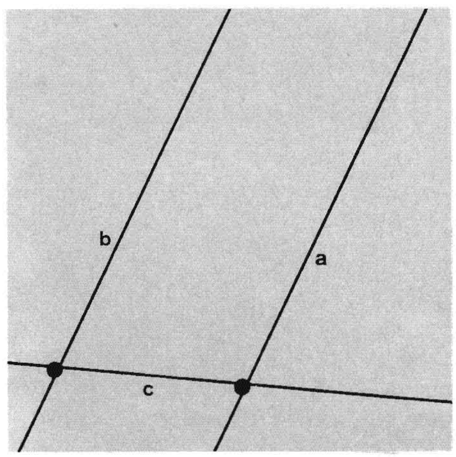
Eine Reihe von Lesern, die an unserem „Mathematischen Kabinett" besondere Freude haben, senden uns gelegentlich Beiträge, die wir immer gern an dieser Stelle veröffentlichen, wenn sie dem Stil unserer Sparte angepaßt sind. Vor kurzem hat uns Herr Dipl.-Math. Gunther Schmidt vom Mathematischen Institut der Technischen Hochschule München eine Abhandlung über die „Geometrie im Unendlichen" zugeschickt, aus der wir im folgenden einige Ausschnitte bringen möchten:
Wer ein wenig an die Geometrie seiner Schulzeit zurückdenkt, wird sich erinnern, wie in mathematischen Lehrsätzen häufig Ausnahmen durch das Auftreten paralleler Geraden hervorgerufen wurden. So haben zwar einerseits zwei verschiedene Punkte $P$ und $Q$ genau eine Verbindungsgerade $g$, andererseits besitzen zwei verschiedene Gerade $a$ und $b$ nur dann einen Schnittpunkt, wenn sie nicht parallel sind (Bilder 1 bis 3). Oder: Drei Punkte $A$, $B$ und $C$, die nicht auf einer Geraden liegen sollen, liefern ein Dreieck – drei




4

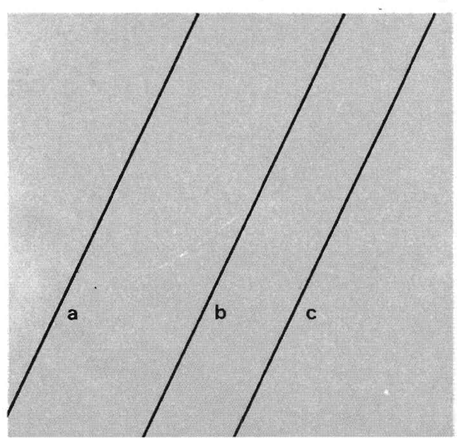



5

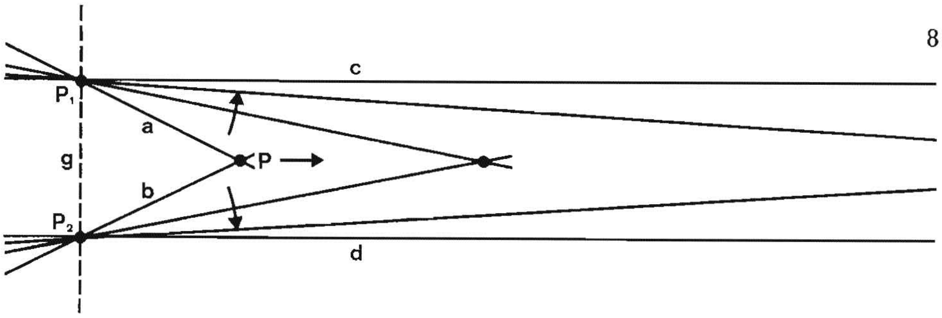



6

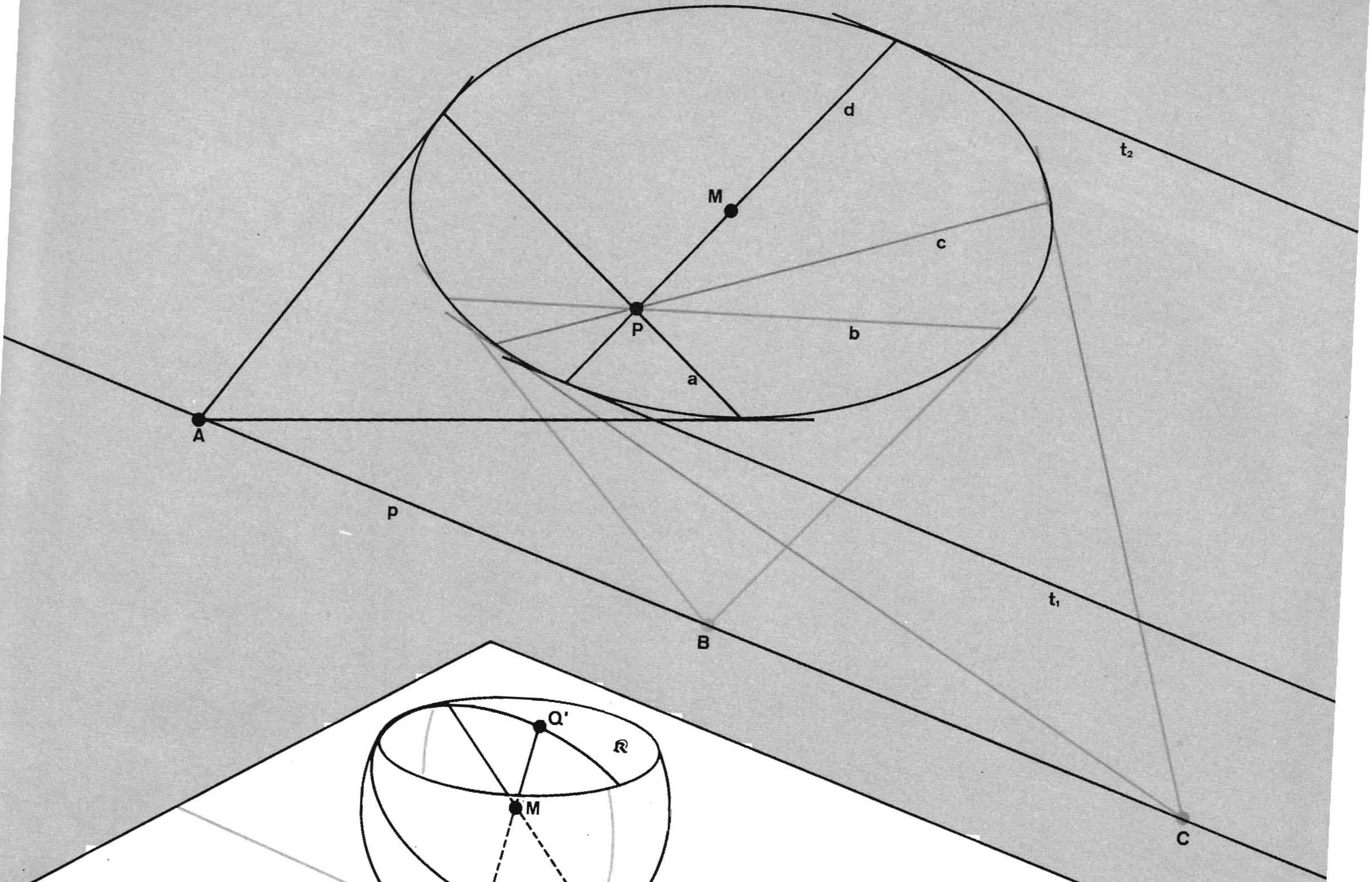
7

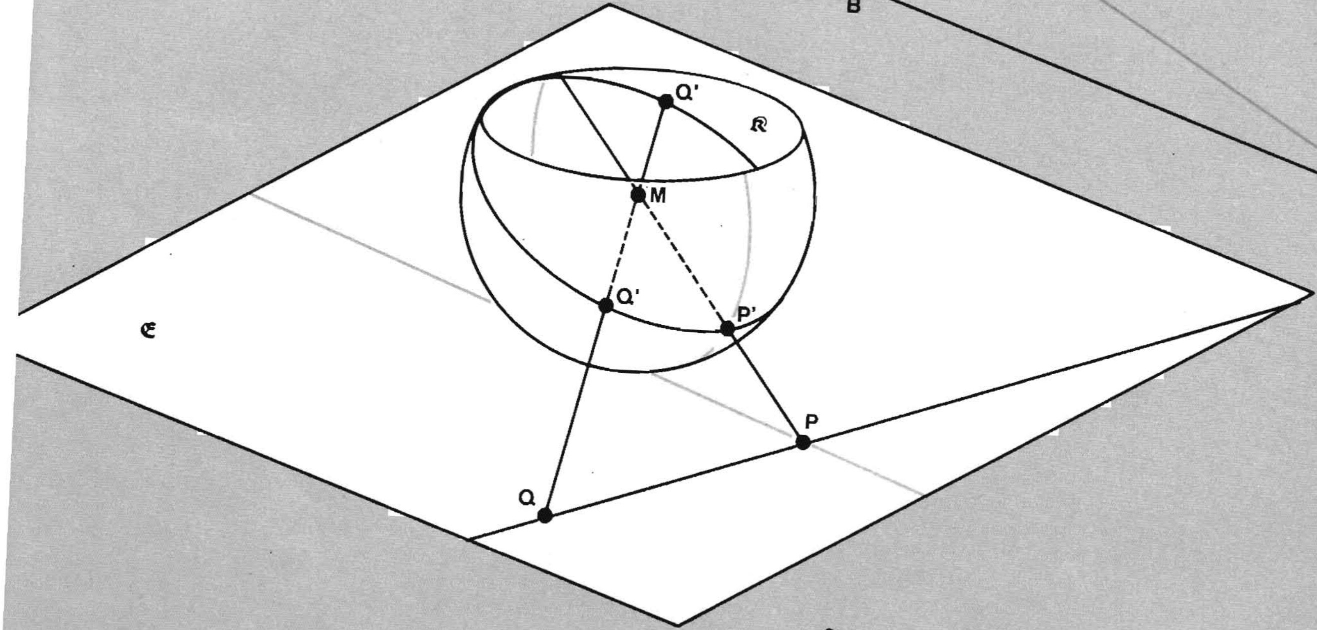


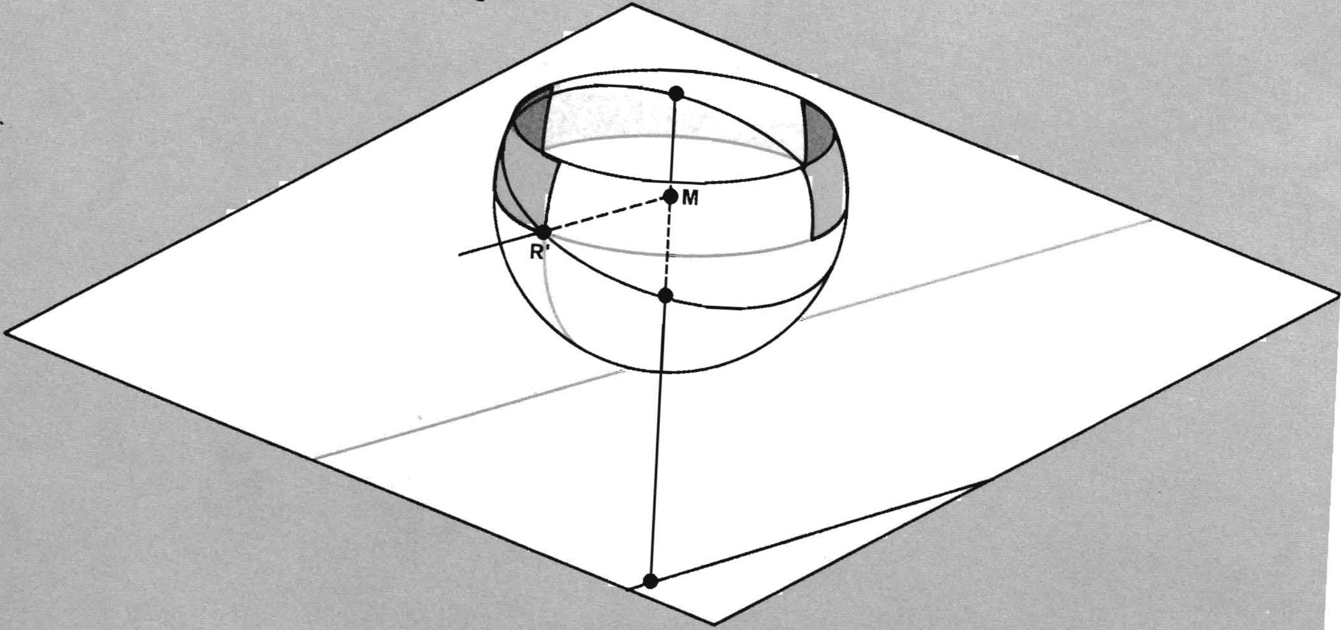
Gerade $a$, $b$ und $c$, die nicht durch einen Punkt laufen, umschließen dagegen nur dann ein Dreieck, wenn nicht zwei von ihnen oder gar alle drei parallel sind (Bilder 4 bis 7).
Auch im folgenden Fall, der gewiß nicht mehr jedem geläufig ist, entstehen Schwierigkeiten. Gegeben sei im Bild 9 eine Ellipse und darin ein Punkt $P$ außerhalb des Mittelpunktes $M$. Zu der durch $P$ verlaufenden roten Geraden $a$ gehört ein Punkt $A$, den man als Schnittpunkt der in den Durchstoßpunkten von $a$ an die Ellipse gelegten Tangenten konstruieren kann. In gleicher Weise gewinnt man zu den Geraden $b$ und $c$ die Punkte $B$ und $C$. Ein bekannter Satz der Geometrie besagt, daß die so gewonnenen Punkte $A$, $B$, $C$ und so weiter alle auf einer Geraden $p$ liegen. Man bezeichnet in diesem Zusammenhang den Punkt $P$ als Pol und die Gerade $p$ als Polare zu $P$. Die schwarze Gerade $d$ allerdings, die durch $P$ und $M$ gelegt wird, bildet eine Ausnahme. Sie schneidet die Ellipse in diametral entgegengesetzten Punkten, in denen die Tangenten $t_1$ und $t_2$ parallel sind und daher keinen Schnittpunkt ergeben. Dafür gilt, sozusagen ersatzweise, daß die Tangenten $t_1$ und $t_2$ zur Polaren $p$ parallel sind.
In allen drei Beispielen und in vielen weiteren Fällen verhindert die Parallelität von Geraden die Allgemeingültigkeit einer Aussage und zwingt zu Einschränkungen „. . . wenn nicht zwei der Geraden parallel sind . . ." und Sonderformulierungen „. . . im Falle der Parallelität gilt statt dessen . . .". Solch ständiges Rücksichtnehmen auf stets denselben Ausnahmefall empfand man natürlich bald als lästig und sann auf Abhilfe. Schon der Schüler ist geneigt zu sagen, daß zwei parallele Gerade „sich im Unendlichen schneiden", ohne daß er damit irgendeine tiefere Vorstellung verbindet. Das Schneiden im Unendlichen erscheint ihm als befriedigender Ausweg, weil es sich ganz vernünftig in alle übrigen Resultate als Grenzfall einordnet. Dreht man nämlich zwei Gerade $a$ und $b$, die sich noch im endlichen Punkt $P$ schneiden, allmählich in die Lage der parallelen Geraden $c$ und $d$, so wandert ihr Schnittpunkt $P$ gleichzeitig immer weiter fort (Bild 8).
Der Mathematiker läßt solche Überlegungen zwar als Anregung zu genauerer Untersuchung gelten, gibt sich aber nicht ohne weiteres damit zufrieden. Sofort taucht doch eine Frage auf, die nicht gleich zu beantworten ist: Schneiden sich $c$ und $d$ nun „rechts im Unendlichen" oder „links im Unendlichen"? Bei der im Bild 8 gezeichneten Annäherung an die Parallelität als Grenzfall plädiert man wohl für „rechts im Unendlichen". Läge die Skizze dagegen um $g$ gespiegelt vor, entschiede man sich eher für „links im Unendlichen". Offenbar ist also beides völlig gleichberechtigt. Demnach möchte man die Existenz von je einem Schnitt rechts und links im Unendlichen annehmen. Damit wäre aber gar nichts gewonnen. Hieß es früher: „Zwei verschiedene Gerade $a$ und $b$ haben genau einen Schnittpunkt, wenn sie nicht parallel sind, sonst dagegen keinen", so würde die Ausnahmeklausel jetzt nur anders lauten: „. . . sonst haben sie deren zwei". Vom Regen sind wir in die Traufe geraten.
Es liegt also nahe, zu verlangen, daß nur ein Schnittpunkt im Unendlichen existiert, daß also der rechts und der links im Unendlichen gelegene in Wirklichkeit ein und derselbe ist. Den beiden Geraden $c$ und $d$ wird also wahrhaft Akrobatisches zugemutet. Sie sollen nach verschiedenen Seiten geradlinig auseinander- und trotzdem in einem einzigen Punkt im Unendlichen wieder zusammenlaufen. Nicht weniger wird auch unser Vorstellungsvermögen strapaziert. Aus der anfänglich so bequemen Redeweise, daß sich parallele Gerade eben im Unendlichen schneiden, hat sich die Aufgabe entwickelt, ein anschauliches globales Bild für den eben angedeuteten Sachverhalt zu suchen.
Man braucht das nicht von vornherein als unmöglich anzusehen. Unsere Vorstellungen von der Ebene, in der wir Geometrie treiben, sind nämlich sehr stark davon beeinflußt, daß wir als Ebene stets nur das vorliegende Zeichenblatt – notfalls noch ein angeklebtes Stückchen, wenn wir bei einer Konstruktion mit dem Platz nicht ausgekommen sind und damit immer einen verschwindend kleinen Teil von ihr betrachten. Dadurch ist das Gesichtsfeld stark eingeengt.
Es gibt ein historisches Beispiel, wie gravierend unsere Vorstellung durch ausschließliches Betrachten eines relativ kleinen Teilbereiches beeinflußt werden kann. Heute haben Astronauten aus einer Raumkapsel die Erde photographiert, so daß wir an ihrer Kugelgestalt nicht mehr zweifeln. Bekanntlich konnte aber erst spät im Mittelalter die Welt davon überzeugt werden, daß die Vorstellung von der Erde als Scheibe mit umliegendem Ozean, auf den die Seefahrer mit ihren Schiffen nicht zu weit hinaussegeln durften, um nicht herunterzufallen – falsch ist. Sicherlich rührte die Vorstellung daher, daß nur ein begrenzter Teil der Erde, nämlich Europa, die Mittelmeerländer und der Orient, näher bekannt war, und vor allem auch daher, daß ein Beobachter das für ihn sichtbare Stück der Erdoberfläche wirklich als Scheibe „sieht". Für so eingegrenzte Bereiche ist es auch heute durchaus vernünftig, eine Landkarte als ebenes Abbild zu benutzen. Es war ein kühner Entschluß, an die damalige Landkarte entferntere Länder nicht nur seitlich in der Ebene daranzukleben, sondern dafür zu sorgen, daß sie „hintenherum" verheftet und damit zu einem Globus als getreuem Abbild der Erde werden. Vorstellungen, die man aus der Gestalt eines relativ begrenzten Landstriches gewonnen hatte, auf die Gesamtgestalt der Erde zu extrapolieren, war dagegen unzulässig.
Nun, ein Mathematiker, der heute die Ebene, in welcher Geometrie betrieben wird, im Unendlichen untersucht und daraus anschaulich nicht leicht faßbare Folgerungen zieht, braucht nicht mehr zu fürchten, in ähnlicher Weise von vornherein auf den bloßen Augenschein verwiesen zu werden. Er kann nach diesem historischen Rückblick mit desto größerer Berechtigung fordern, daß nicht wieder aus gewohnter Anschauung im Kleinen vorbehaltlos auf die globale Struktur im Großen geschlossen wird. Sich vorzustellen, daß uns bei Wanderung auf der Geraden $c$ in Bild 8 ins Unendliche die beiden Marschrichtungen „links" und „rechts" zum selben unendlich fernen Punkt führen, ist schließlich nicht schwerer, als zu glauben, daß man sowohl auf dem Ostkurs als auch auf dem Westkurs nach Indien gelangen kann. Letzteres erscheint uns aber heute durchaus nicht geheimnisvoll.



8


d
$t_2$
M
c
P
b
a
A
p
$t_1$
B
C


Q'
$\mathfrak{K}$
M
$\mathfrak{E}$
Q'
P'
P
Q


M
R'

Wir gehen also daran, eine gewölbte „Landkarte" unserer Ebene $\mathfrak{E}$ anzufertigen (Bild 10). Vom Punkte $M$ aus projizieren wir die gesamte Ebene auf die um $M$ als Mittelpunkt gelegte Kugelschale $\mathfrak{K}$, die etwas größer sein soll als eine Halbkugel.
Jedem Punkt $P$ der Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht dann ein Punkt $P'$ auf $\mathfrak{K}$, die rote Gerade bildet sich in den roten Kreisbogen auf $\mathfrak{K}$ mit Mittelpunkt in $M$ ab, und wenn sich die rote Gerade und die blaue Gerade im Punkt $P$ schneiden, so kreuzen sich die zugehörigen Kreise genau in $P'$. Alles, was mit Schneiden oder Verbinden von Geraden und Punkten in der Ebene zu tun hat, wird also auf der Kugelschale getreulich von den Kreisen und Punkten in entsprechender Weise besorgt.
Daß manche Punkte, wie zum Beispiel $Q$, zwei diametral gegenüberliegende Bilder $Q'$ erhalten, braucht uns gar nicht zu stören. Nicht wenige Karten der Gesamterdoberfläche in unseren Atlanten enthalten ja auch so aus unserer Sicht – exponierte Gegenden wie Alaska und Kamtschatka in doppelter Ausführung. Sie ragen von zwei Seiten in das Kartenbild herein. In Gedanken vollzieht man das Zusammenbiegen der Karte, so daß die genannten Gebiete aufeinanderliegen und festgeklebt werden können, womit alles wieder seine Ordnung hat.
Nun bemerken wir aber noch, daß uns auf $\mathfrak{K}$ ganz neue Möglichkeiten gegeben werden: Die rote und die blaue Gerade im Bild 11 nämlich sind in der Ebene parallel und besitzen daher keinen Schnittpunkt. Ihre Bilder auf der Kugelschale jedoch, der rote und der blaue Kreis, besitzen einen Schnittpunkt $R'$ auf dem grün gezeichneten Äquator. Wo kommt überhaupt der Äquator her? Während alle anderen Kreise auf der Kugel eine Gerade in der Ebene repräsentieren, tut er das nicht, weil er parallel zur Ebene liegt und so nicht von $M$ aus darauf projiziert werden kann. Die Bilder aller parallelen Geraden haben auf dem Äquator einen Schnittpunkt, und es leuchtet ein, ihn als das Bild einer ganzen unendlich fernen Geraden der Ebene anzusehen. Um anzudeuten, daß diese als unendlich ferne Gerade neu zur Ebene hinzugenommen wird, bezeichnen wir sie hier mit $g_\infty$. Ihr Bild, der Äquator, hat jetzt gar nichts Unendliches mehr an sich und liegt völlig anschaulich und konkret auf unserer Kugelschale. Das ist ein großer Vorzug gegenüber den zunächst nebulosen „unendlich fernen" Schnittpunkten der Ebene, die erst jetzt durch den Äquator, als konkretes Modell der neu eingeführten unendlich fernen Geraden, einen präzisen Sinn erhalten.
Die Schwierigkeiten aus den anfangs beschriebenen drei Beispielen haben sich damit aufgelöst. Denken wir zurück, so liegt im Bild 6 nun ein Dreieck vor, dessen einer Eckpunkt sich auf der Geraden $g_\infty$ befindet. Im Bild 7 dagegen laufen die drei parallelen Geraden durch einen gemeinsamen Schnittpunkt, und wir erhalten deshalb kein Dreieck; allerdings liegt der Schnittpunkt auf $g_\infty$. Im Bild 9 waren die beiden Tangenten $t_1$ und $t_2$ und die Polare $p$ parallel, so daß sie nach unseren Überlegungen jetzt einen gemeinsamen Schnittpunkt auf $g_\infty$ besitzen und wieder eine störende Ausnahme beseitigt ist.

## Ein neues Problem

Zum Schluß wollen wir unseren Lesern noch eine kleine Scherzaufgabe mitteilen, deren Lösung für einen Mathematiker sofort ersichtlich ist. Merkwürdigerweise jedoch bereitet diese Aufgabe Nichtmathematikern ganz erstaunliche Schwierigkeiten, wie jeder Leser in einer Gesellschaft sofort feststellen kann. Sie lautet:
Ein Topf und ein Deckel kosten zusammen DM 11, . Der Topf ist DM 10,— teurer als der Deckel. Wieviel kosten die beiden Stücke einzeln?

## Lösung des Problems aus Heft 8/1966

Im vorigen Heft haben wir an dieser Stelle unseren Lesern die Konstruktion eines magischen Quadrates aus den 28 Dominosteinen überlassen, wobei die 56 quadratischen Felder der Dominosteine zu einem Rechteck zusammengelegt werden mußten, bei dem die letzte rechte Spalte aus punktfreien Feldern bestehen sollte. Die 48 Felder mit Augen bilden zusammen mit einem freien Feld ein Quadrat $7 \cdot 7 = 49$. Die Summe der Augen in allen Reihen, Spalten und in den beiden Diagonalen sollte die gleiche Zahl – nämlich 24 – ergeben.