Nicht im Handel

Sonderabdruck aus 52. Band, 1. Heft der

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

Herausgegeben von J. Radon, Wien

Springer-Verlag in Wien

Wilhelm Wirtinger †.

Von

Hans Hornich, Wien.

Am 16. Jänner 1945 starb nach kurzem Leiden in seiner Heimatstadt Ybbs/Donau in Niederösterreich im achtzigsten Lebensjahr *Wilhelm Wirtinger*, einer der bedeutendsten österreichischen Mathe-

matiker, 1903—35 ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Wien und seit 1903 Herausgeber der „Monatshefte für Mathematik und Physik", welcher Zeitschrift er sein besonderes Interesse bis zuletzt bewahrt hat.

Er wurde am 19. Juli 1865 in Ybbs geboren als Sohn des Primararztes Dr. *Johannes Ev. Wirtinger*, eines wissenschaftlich sehr interessierten Mannes, dem u. a. die Entdeckung der sogenannten Typhuskurve zu verdanken ist. Seine Kindheit verlebte er in seinem Heimatort, dem er stets eine anhängliche Liebe bewahrte, die ihn auch seine letzten Lebensjahre dort verbringen ließ. In seinem achten Lebensjahr erkrankte er an einer schweren Scharlachdiphterie, als deren Folge er eine dauernde Schwerhörigkeit davontrug, die ihn zeitlebens im Verkehr sehr behinderte. Das Gymnasium besuchte er bei den Benediktinern in Seitenstetten, später in Melk und in St. Pölten; hier erlangte er durch allerdings ziemlich unsystematisches Lesen in den damals üblichen Lehrbüchern, aber auch in den Originalarbeiten von *Newton* und *Euler* aus der Stiftsbibliothek eine gewisse Gewandtheit in der Handhabung des Infinitesimalkalküls. Es ist bemerkenswert, daß ihm damals bereits der Begriff der Riemannschen Fläche aus *Riemanns* Werken völlig geläufig war und daß er *Neumanns* mechanische Wärmetheorie und seine Vorlesungen über Abelsche Integrale las.

Auf der Universität Wien, die er von 1884 an besuchte, waren seine Lehrer *Emil Weyr* und *Gustav Escherich*. *Weyr* weckte in ihm das Interesse für synthetische Geometrie, dem auch seine ersten Publikationen (1, 2 des anschließenden Verzeichnisses), sowie seine (nicht veröffentlichte) Dissertation „Über eine kubische Involution in der Ebene" (1887) entsprangen. *Escherich* hat die damals erst langsam in weitere Kreise dringenden Weierstraßschen Ideen und dessen Art der Darstellung der Analysis dem jungen *Wirtinger* vermittelt; er lernte jetzt systematischer und genauer denken und arbeiten; aber seine Vorliebe gehörte damals und in der Folge stets den durch *Riemann* angeregten Methoden der Funktionentheorie und dem Streben nach möglichster Veranschaulichung durch geometrische Gebilde. Durch ein Reisestipendium konnte er ein Jahr in Berlin und Göttingen verbringen. In Berlin hörte er *Weierstraß*, *Kronecker* und *Fuchs*, ohne aber trotz vieler Eindrücke einen bleibenden Anschluß zu finden. In Göttingen las *Felix Klein* Abelsche Funktionen und partielle Differentialgleichungen der Physik; hier gewann Wirtinger zumal im Seminar, das er (gemeinsam mit *Osgood*) besuchte, sofort vielseitigste Anregung und es verband ihn mit *F. Klein* eine aufrichtige Freundschaft bis zu dessen Tod.

1890 habilitierte sich *Wirtinger* an der Universität Wien. Eine Assistentenstelle bei *E. Czuber* an der Technischen Hochschule ermöglichte ihm im selben Jahr die Heirat mit seiner aus der gleichen Heimat stammenden Frau *Amalia*, geb. *Feyertag*. Seine Frau, die mit vieler Liebe für ihn sorgte, trat niemals in den Vordergrund seines beruflichen Lebens. Sie starb wenige Jahre vor seinem Tod. Der Ehe entstammten drei Söhne und zwei Töchter. Zwei seiner Söhne starben kurz vor, bzw. im ersten Weltkrieg.

In diesen Jahren schrieb *Wirtinger*, durch die Assistentenstelle nur wenig in Anspruch genommen, eine Reihe von Arbeiten (4, 8, 9, 10), als deren Abschluß die große von der philosophischen Fakultät in Göttingen 1895 mit dem Beneke-Preis ausgezeichnete Arbeit „Untersuchungen über Thetafunktionen" (14) erschien. Es handelt sich dabei um folgende Probleme: Die Reihe

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{n_1, \ldots, n_p: -\infty}^{+\infty} e^{\pi i \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{p} \tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + 2\pi i \sum\limits_{\alpha=1}^{p} v_\alpha n_\alpha}$$

stellt für beliebige endliche v_α eine ganze Funktion in jeder der Variablen v_α dar, wenn die $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ so beschaffen sind, daß die $\mathfrak{J}(\tau_{\alpha\beta})$ das Koeffizientenschema einer positiv definiten quadratischen Form darstellen; das sind die allgemeinen Thetafunktionen. Wählt man für die v_α die Normalintegrale eines algebraischen Gebildes vom Geschlechte p und für die $\tau_{\alpha\beta}$ die Perioden dieser Integrale, so erhält man die speziellen algebraischen oder Riemannschen Theta. *Wirtinger* hat nun gezeigt, und das ist ein Hauptresultat seiner tiefliegenden Untersuchungen, daß auch die allgemeinen Theta sich durch algebraische Theta gewinnen lassen: Es gibt spezielle algebraische Gebilde mit einem Geschlecht $q > p$, deren algebraische Thetafunktionen nach einer Transformation in das Produkt einer Thetafunktion von p und einer von $q - p$ Variablen zerfallen, so daß die ersteren vorgegebene allgemeine Theta ergeben. Die Konstruktion dieser speziellen algebraischen Gebilde hat nun *Wirtinger* durch ein von ihm eingeführtes eigenartiges Verfahren angegeben: Es werden z. B. zwei kongruente Riemannsche Flächen vom Geschlecht $p + 1$ längs eines die Fläche nicht zerlegenden Querschnittes miteinander verheftet; die durch eine solche unverzweigte Verbindung entstehende Fläche hat doppelt soviele Blätter und Verzweigungen als die ursprüngliche Fläche, ist also vom Geschlecht $2p + 1$. Die $2p + 1$ Integrale erster Gattung dieses Gebildes setzen sich aus den $p + 1$ Integralen der ursprünglichen Fläche und p weiteren Integralen zusammen, welch letztere von $3p$ Parametern abhängen und daher allgemeinere als die Riemannschen Theta liefern. Diese Theta wurden nun von *Wirtinger* im zweiten Teil seiner Preisarbeit näher untersucht und ihre Theorie analog wie die der Riemannschen aufgebaut.

Die allgemeinen Thetafunktionen behandelt *Wirtinger* im ersten Teil seiner Arbeit, indem er 2^p linear unabhängige Thetaquadrate als homogene Koordinaten eines Raumes von $2^p - 1$ Dimensionen interpretiert; bei variablen $v_1, \ldots, v_p$ erhält man eine algebraische Mannigfaltigkeit von p Dimensionen in diesem Raum, die für $p = 2$ die Kummersche Fläche ist. Diese Beziehung der allgemeinen Thetafunktionen zu einem algebraischen Gebilde gibt dann die Möglichkeit, die erwähnte Verbindung zwischen den allgemeinen und algebraischen Theta herzustellen.

Auf Grund dieser bedeutsamen Arbeiten wurde *Wirtinger* 1895 als Extraordinarius nach Innsbruck berufen, wo er eine sehr vielseitige und ausgedehnte Vorlesungstätigkeit entfaltete. Daneben erschien wieder eine Reihe von Arbeiten..

Zunächst eine Arbeit über Schwingungsprobleme bei Saiten von veränderlicher Dichte (15); hier wird, also vor Einführung der Integralgleichungen, gezeigt, daß die Frequenzen der Schwingungen einer unendlich langen Saite mit periodischer Dichte eine unendliche Folge von Intervallen erfüllen; in dieser Arbeit liegt also der Keim und der Anstoß für die moderne Theorie der Spektren bei solchen Differentialgleichungen, welche diese Bezeichnung aus der *Wirtinger*schen Arbeit übernommen hat.

Für den Abel-Festband der „Acta Mathematica schrieb *Wirtinger* über Aufforderung *Mittag-Lefflers* zwei Arbeiten (25, 26), von denen die eine über die *Euler*sche Summenformel infolge der ungemein einfachen Herleitung dieser Formel und des sich dabei zwanglos ergebenden Zusammenhanges mit den *Bernoulli*schen Funktionen heute überall zur Darstellung dieser Dinge verwendet wird. Die zweite Arbeit gilt, wie auch mehrere andere Arbeiten (13, 16) den $2p$-fach periodischen Funktionen: hier wird gezeigt, daß ein beliebiges Parallelotop im reellen R_{2p} durch Einführung von n komplexen Variablen, deren Real- und Imaginärteil aus den $2p$-reellen Koordinaten des R_{2p} durch orthogonale Transformation hervorgehen, in diesen neuen komplexen Variablen als ein die Bilinearrelationen der $2p$-fach periodischen Funktionen erfüllendes Gebiet sich darstellt. Anläßlich des Abel-Jubiläums in Oslo wurde übrigens *Wirtinger* das Ehrendoktorat der Universität Oslo verliehen.

In die Innsbrucker Jahre fällt auch die Abfassung des Artikels „Algebraische Funktionen und ihre Integrale" für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften; der Artikel „Abelsche und $2n$-fach periodische Funktionen" sollte von *Wirtinger* und *Krazer* gemeinsam verfaßt werden; aber eine doch mehr kompilatorische Tätigkeit war *Wirtinger* nicht gelegen und so wurde die endgültige Redaktion dieses zweiten Artikels von *Krazer* allein besorgt. Überhaupt war die ganze Art *Wirtingers* viel zu sehr auf neue Gedanken und Probleme gerichtet, als daß er zur Abfassung von Lehrbüchern oder auch nur von zusammenhängenden Berichten sich entschließen hätte können.

1903 wurde *Wirtinger* als Nachfolger *Gegenbauers* als ordentlicher Professor nach Wien berufen und blieb in dieser Stellung durch 32 Jahre bis zum Ende seiner Lehrtätigkeit im Jahre 1935. Seine Kollegen waren zunächst *Escherich* und *Mertens*, und nach deren Ausscheiden *Ph. Furtwängler* und *H. Hahn*. Die Geometrie vertrat *G. Kohn*, später (ab 1927) *Karl Menger*.

In den Vorlesungen wurde ein dreijähriger Zyklus eingehalten, so daß jeder Professor jedes dritte Jahr die Anfangsvorlesung zu halten hatte. In den beiden anderen Jahren pflegte *Wirtinger* gewöhnlich Funktionentheorie und im letzten Jahr über algebraische oder elliptische Funktionen zu lesen. Neben diesen Hauptvorlesungen lief dann das zweistündige Seminar, in dem er infolge seiner Schwerhörigkeit meist selbst vortrug, sowie eine Proseminar- und eine Übungsstunde, in welcher er in den letzten Jahren seiner Tätigkeit gern Archimedeslektüre betrieb, wozu ihn seine guten Kenntnisse des Griechischen und seine Vorliebe für diesen Forscher besonders anzog.

Seine Vorlesungen erforderten eifrigstes Mitarbeiten und nachheriges gründlichstes Überdenken. Denn sein Vortrag beschränkte sich nicht auf eine vorgezeichnete Linie, sondern griff immer wieder, seinem universalen Wissen und seiner ganzen Denkungsart gemäß, auf verwandte Gebiete über; so kamen insbesondere auch stets geometrische Gesichtspunkte zur Geltung, wie in der Funktionentheorie die Differentialgeometrie und bei den algebraischen Funktionen sehr ausführlich die Theorie der algebraischen Kurven. Daher war eine Vorlesung bei *Wirtinger* auch für den, der das Gebiet schon kannte, immer noch fruchtbar, jedoch dem gewöhnlichen Hörer schwierig, so daß selbst in der Zeit der Überfüllung aller Hochschulen, wo etwa bei *Furtwängler* oder *Hahn* an die 400 Hörer waren, bei *Wirtinger* meist kaum 50 Hörer saßen. Im Seminar waren wohl nie mehr als 3 bis 4;

hier trug er seine Arbeiten unmittelbar nach ihrer Entstehung, bevor er sie noch zusammengeschrieben hatte, vor. In diesem Kreis war *Wirtinger* der ideale Hochschullehrer; alle, die hier seine Schüler waren, haben von ihm reichste Anregungen erfahren und ich erinnere mich dankbar der langen Zeit, in der ich seinen persönlichen Unterricht erfahren durfte.

An äußeren Ehrungen erwähne ich noch die Verleihung der Sylvester-Medaille durch die Royal Society, zu deren Empfang er 1907 nach England reiste und wohin er 1920 wiederum auf einige Wochen nach Cambridge eingeladen wurde. Seit 1905 war *Wirtinger* wirkliches Mitglied der Wiener Akademie, als korrespondierendes Mitglied gehörte er der Göttinger und der Berliner Akademie, sowie seit 1927 der Päpstlichen Akademie der Wissenschaften an. Im Studienjahre 1915/16 war er Dekan der philosophischen Fakultät; von seinen sonstigen Ämtern, die er trotz zunehmender Schwerhörigkeit gewissenhaft versah, erwähne ich die mühevolle Mitgliedschaft an der Prüfungskommission für das Lehramt an Mittelschulen und der Kommission für das Versicherungswesen.

Ich komme nun zu den Arbeiten *Wirtingers* in dieser Periode. Diese entstanden meist im Anschluß an die Vorlesungen: der einfache Beweis des *Hadamard*schen Determinantensatzes (33, 34), über besondere Dirichletsche Reihen (32), zur Partialbruchzerlegung (40), über den Weierstraßschen Vorbereitungssatz (48), der einen besonderen eleganten Beweis liefert, über die konforme Abbildung der Riemannschen Fläche durch Abelsche Integrale, besonders für $p = 1, 2$ (36). Die hypergeometrischen Funktionen haben *Wirtinger* wiederholt beschäftigt (27, 28, 29, 30, 49); er hätte auch die Vorlesungen von *F. Klein* über dieses Thema auf dessen Wunsche herausgeben sollen, kam aber nicht dazu, so daß dann *O. Haupt* die Herausgabe besorgte. Eine Reihe von Arbeiten galt den Entwicklungen der allgemeinen Differentialgeometrie, die im Anschluß an die Relativitätstheorie entstanden (39, 41, 42, 43) und meist einen mehr allgemeinen und erkenntnistheoretischen Charakter trugen.

Anstatt nun auf einzelne dieser Arbeiten näher einzugehen, ziehe ich es vor, aus den unveröffentlichten Ergebnissen, wie sie *Wirtinger* im Seminar mitgeteilt hat, einiges anzuführen, das sich eng an den Problemkreis seiner Preisarbeit (14) anschließt.

Die *Weber-Noether*sche Normalkurve eines algebraischen Gebildes vom Geschlecht 5 ist eine C_8 des R_4, die (wenn keine dreiwertigen

Funktionen auftreten) der Schnitt dreier Hyperflächen zweiter Ordnung ist:

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k = \sum_{i,k} b_{ik}\, x_i\, x_k = \sum_{i,k} c_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

Die allgemeinste quadratische Hyperfläche, die die C_8 enthält, hat die Form

$$\sum_{i\, k,} \left(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 b_{ik} + \xi_3 c_{ik} \right) x_i\, x_k = 0$$

und ist ein Kegel, wenn die Determinante

$$\left| \xi_1 a_{ik} + \xi_2 b_{ik} + \xi_3 c_{ik} \right| = 0 \qquad (ik = 1\,,\ldots,5)$$

Deutet man die ξ_i als Punktkoordinaten einer Ebene, so erhalten wir eine singularitätenfreie C_5 vom Geschlecht 6. Nehmen wir einen Punkt dieser C_5, bzw. den entsprechenden Kegel des R_4; schneidet man den Kegel durch einen linearen R_3 nach zwei Ebenen, so enthält jede dieser Ebenen vier Punkte der Normalkurve C_8. Es sind dann jedem Kegel zwei Scharen von korresidualen Quadrupeln der C_8 zugeordnet, so daß die Summe der Integrale erster Gattung für diese Quadrupeln bei geeigneter Normierung w_i bzw. $-w_i$ sind. Denkt man sich die ebene C_5 doppelt überdeckt, so können wir jedem Punkt dieser doppelt überdeckten C_5 eindeutig ein korresidual verschiebbares Quadrupel der C_8, bzw. ein Wertesystem w_i zuordnen. Diese Doppelüberdeckung der C_5 ist eine unverzweigte und zusammenhängende; das Geschlecht dieses Gebildes ist dann 11 und die 5 außer den früheren Integralen erster Gattung noch ausstehenden Integrale erster Gattung werden gebildet durch Integrale über Wurzelfunktionen zweiter Stufe, die Kurven vierter Ordnung entsprechen, die die C_5 in 10 Punkten berühren. Die zugehörigen Thetafunktionen sind wieder *Wirtinger*sche Theta von fünf Variablen. Von Interesse ist dann noch der Ort aller Kegelspitzen, eine C_{10} im R_4; ferner der Fall, daß das algebraische Gebilde, von dem wir ausgingen, eine dreiwertige Funktion enthält.

Zur Feier seines siebzigsten Geburtstages versammelten sich die zahlreichen Freunde, Kollegen, Schüler und viele Hörer *Wirtingers* in dem freundlichen niederösterreichischen Städtchen Ybbs, wo dieser seit langem ein kleines Häuschen besaß und wo er stets seine Ferienzeit verbrachte. Aber das gleichmäßige, nur der Arbeit gewidmete Leben *Wirtingers* erfuhr durch das Aufhören der Lehrtätigkeit zunächst wenig Änderung: täglich kam er während der Vorlesungszeit nach wie vor ins mathematische Seminar in sein Arbeitszimmer, wo er nun von der Last der Vorlesungen und den damit verbundenen Ämtern befreit, nur mehr der Ausarbeitung seiner Ideen leben konnte. So kam es, daß gerade im letzten Jahrzehnt seines Lebens noch mehrere wertvolle größere Arbeiten von ihm fertiggestellt werden konnten.

Die erste Arbeit dieser Reihe (63, 65) zeigt eine Determinantenidentität, die in geometrischer Formulierung besagt: In einem R_{2n} mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2n}$ und mit $z_a = x_a + ix_{a+n}$, $\bar{z}_a = x_a - ix_{a+n}$, $(a = 1, \ldots, n)$ ist das Volumen eines von $2m$ Vektoren $(m < n)$ aufgespannten Parallelotopes $\geqq$ der Summe der Projektionen auf die sämtlichen $2m$-dimensionalen Koordinatenhyperebenen $(z_{a_1}, \ldots, z_{a_m}$ $\bar{z}_{a_1} \ldots \bar{z}_{a_m})$, und zwar gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn das Parallelotop in einer analytischen, komplex m-dimensionalen Mannigfaltigkeit liegt. Anschließend wird eine Integralinvariante für eine $2m$-dimensionale Mannigfaltigkeit aufgestellt, die stets $\leqq$ dem $2m$-dimensionalen Volumen dieser Mannigfaltigkeit ist, wo das Gleichheitszeichen wieder nur steht, wenn die Mannigfaltigkeit analytisch ist.

Für algebraische Gebilde ergeben sich dabei merkwürdige Beziehungen zu Ordnung und Klasse, sowie zur curvatura integra, welche allerdings nicht mehr näher ausgeführt wurden. Eine weitere Arbeit (66) gilt im Anschluß an diese einer Ausdehnung des Cauchyschen Residuensatzes auf mehrere komplexe Veränderliche und damit einer sinnvollen Definition der Ordnung einer $2p$-fach periodischen Funktion für $p > 1$.

Lange hat sich *Wirtinger* mit Translationsmannigfaltigkeiten beschäftigt (67, 69). Eine Translationsmannigfaltigkeit von m Dimensionen in einem R_n entsteht dadurch, daß man aus m Kurven $x_a = x_{a\lambda}(t_\lambda)$ $(\lambda = 1, \ldots, m)$ durch Parallelverschiebung jeder dieser Kurven die Fläche bildet:

$$X_a = \sum_{\lambda=1}^{m} x_{a\lambda}(t_\lambda)$$

Es entsteht die Frage nach den Flächen, die auf mehr als eine Art als Translationsmannigfaltigkeit erzeugt werden können. Diese von *Lie* gestellte und im einfachsten Fall von ihm, sowie *Poincaré*, *Darboux* und *Scheffers* behandelte Frage wurde erst von *Wirtinger* mit ganz neuen Methoden und in großer Allgemeinheit gelöst; er hat gezeigt, daß, wenn eine Fläche auf zwei Arten als Translationsmannigfaltigkeit darstellbar sein soll, die Funktionen $x_{a\lambda}$ die Abelschen Integrale erster Gattung eines Gebildes vom Geschlecht $m+1$ sein müssen und die Fläche selbst als die Nullmannigfaltigkeit einer entsprechenden Thetafunktion dieses Gebildes sich darstellt. Überraschend ist dabei, daß zur Formulierung des Satzes keinerlei Bezug auf analytische Eigenschaften der Fläche genommen wird; die $x_{a\lambda}$ werden nur als viermal stetig differenzierbare Funktionen der t_λ angenommen.

Diese umfangreiche Arbeit, von der eine Reihe geometrisch interessanter Spezialfälle sich abzweigen (69), ist eine der schönsten Arbeiten der mathematischen Literatur der letzten Jahrzehnte.

Die letzte publizierte Arbeit endlich (71) behandelt einen Zusammenhang zwischen den Integralen dritter Gattung und linear polymorphen Funktionen, das sind solche, die bei Durchlaufung geschlossener Wege lineare Transformationen erfahren.

Ein wie großes Interesse *Wirtinger* auch der Physik, Astronomie und sogar solchen Wissenschaften, die fern der Mathematik liegen, wie Sprachen und Literatur, entgegenbrachte, ist jedem, der mit ihm oft beisammen war, bekannt; sein Interesse war auch nie bloß ein dilettantisches, sondern sein Wissen reichte immer bis ins Wesentliche der Wissenschaft. In seiner universellen Bildung hatte er wohl wenige seinesgleichen.

In der Welt der Mathematiker war *Wirtinger* eine Größe, bedeutend durch die Fülle der Anregungen und neuen Gedanken, die von ihm ausgingen, ebenso wie durch die Zahl und den Inhalt seiner Publikationen. Dies kam auch in den internationalen Mathematikerkongressen, die *Wirtinger* gern besuchte, zum Ausdruck, wo er stets ein ausgezeichneter Repräsentant Österreichs war.

Die letzten Lebensjahre hat er wieder in seiner Heimat Ybbs verbracht, bis zuletzt geistig frisch und mit neuen mathematischen Arbeiten beschäftigt.

Verzeichnis der Arbeiten.

1. Über die Brennpunktkurve der räumlichen Parabel, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 94 (1886), 302—309.
2. Über rationale Raumkurven 4. Ordnung, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 93 (1886), 28—45.
3. Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichung, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 98 (1889), 66—72.
4. Über das Analogon der Kummerschen Fläche für p = 3, Gött. Nachr. (1889), 474—480.

5. Bemerkungen über ganzzahlige irreduktible Gleichungen, Mh. Math. Phys. 1 (1890), 47—48.
6. Über Funktionen, welche gewissen Funktionalgleichungen genügen, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 99 (1891), 918—925.
7. Bemerkung über elliptische Modulfunktionen, Mh Math. Phys. 1 (1890), 429—432.
8. Über eine Verallgemeinerung der Kummerschen Fläche und ihre Beziehungen zu den Thetafunktionen zweier Variablen, Mh. Math. Phys. 1 (1890), 113—128.
9. Zur Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3, Mh. Math. Phys. 2 (1891), 55—66.
10. Untersuchungen über Abelsche Funktionen vom Geschlecht 3, Math. Ann. 40 (1891), 261—312.
11. Über die Rektifikation algebraischer Kurven, insbesondere derjenigen 3. Ordnung bei projektiver Maßbestimmung, Mh. Math. Phys. 5 (1894), 92—96.
12. Über eine Eigenschaft der Wendetangenten der Kurve 3. Ordnung, Mh. Math. Phys. 4 (1893), 395—397.
13. Zur Theorie der 2n-fach periodischen Funktionen 1, Mh. Math. Phys. 6 (1895), 69—98.
14. Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig, B. G. Teubner 1895.
15. Beitrag zu Riemanns Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme, Math. Ann. 48 (1897), 365—389.
16. Zur Theorie der 2n-fach periodischen Funktionen 2, Mh. Math. Phys. 7 (1896), 1—25.
17. Über eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Greenschen Wirkungsgesetzes, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 105 (1896), 575—586.
18. Über die Beziehungen der Kummerschen Fläche zur projektiven Erzeugung der ebenen Kurven 4. Ordnung mit Doppelpunkt, J. Deutsche Math. Ver. 4 (1897), 97—99.
19. Über die Greensche Funktion eines von getrennten sphärischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Gebietes, Gött. Nachr. (1897), 244—246.
20. Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 108 (1899), 1239—1249.
21. Karl Schober (Nachruf), J. Deutsche Math. Ver. 8 (1900), 66.
22. Eduard Wiltheiß (Nachruf), J. Deutsche, Math. Ver. 9 (1901), 59—63.
23. Geodätische Linien und Ponceletsche Polygone, J. Deutsche Math. Ver. 9 (1901), 130—131.
24. Algebraische Funktionen und ihre Integrale, Enz. d. math. Wiss. 2, 2.
25. Über einige Probleme in der Theorie der Abelschen Funktionen, Acta Math. 26 (1902), 133—156.
26. Einige Anwendungen der Euler-Maclaurinschen Summenformel, insbesondere auf eine Aufgabe von Abel, Acta Math. 26 (1902), 255—272.
27. Zur Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 111 (1902), 894—900.
28. Eine neue Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 112 (1903), 1721—1733.
29. Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung, Verh. d. 3. internat. Math. Kongr. Heidelberg.
30. Über die Anzahl der linear unabhängigen hypergeometrischen Integrale, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 114 (1905), 1571—1588.
31. Über die Entwicklung einiger mathematischer Begriffe in neuerer Zeit, Wien, Hölder, 1906.

32. Über eine besondere Dirichletsche Reihe, J. reine angew. Math. 129 (1905), 214—19.
33. Sur le theoreme de M. Hadamard relatif aux determinants, Darb. Bull. (3), 31 (1907), 175—179.
34. Zum Hadamardschen Determinantensatz, Mh. Math. Phys. 18 (1907), 158—160.
35. Bemerkungen zur Theorie der vollständigen Differentiale, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 118 (1909), 1373—1377.
36. Über die konforme Abbildung der Riemannschen Fläche durch Abelsche Integrale, insbesondere bei $p = 1, 2$, Wien, Denkschriften 85.
37. (Zusammen mit Krazer). Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen, Enz. d. math. Wiss. II, B, 7, 1920.
38. Über eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $yy'' = mx^2$, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 128 (1919), 3—8.
39. On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity, Anz. Akad. Wiss. Wien, 59 (1922), 160.
40. Bemerkung zur Partialbruchzerlegung, Mh. Math. Phys. 31 (1921), 58—59.
41. On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity, Cambridge Philosophical Soc. Trans. 22 (1922), 439—448.
42. Über allgemeine Maßbestimmungen, in welchen die geodätischen durch lineare Gleichungen bestimmt werden, Mh. Math. Phys. 33 (1923), 1—14.
43. Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung, Hamb. math. Einzelschr. 3.
44. Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen, Math. Ann. 97 (1927), 357—375.
45. Zur Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen, Mh. Math. Phys. 34 (1926), 81—88.
46. Bemerkungen zum Studyschen projektiven Bogenelement, Mh. Math. Phys. 34 (1926), 37—40.
47. Mitwirkung an der Redaktion der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (zweiter Band).
48. Über den Weierstraßschen Vorbereitungssatz, J. reine angew. Math. 158 (1927), 260—267.
49. Über die konforme Abbildung der Ebene auf ein Kreisbogendreieck, Atti Pontif. Accad. 80 (1927), 291—309.
50. Über einen grundlegenden Satz der Invariantentheorie, Mh. Math. Phys. 35 (1928), 219—222.
51. Über symmetrisierbare Determinanten, Anz. Akad. Wiss. Wien, 67 (1920), 121—123.
52. Über den asymptotischen Wert des Integrals $\int_0^\infty x^k e^{-e^x} dx$, Mh. Math. Phys. 37 (1930), 343—348.
53. Über einige bestimmte Integrale, welche mit der Riemannschen Zetafunktion zusammenhängen. Atti Pontif. Accad. 83 (1930), 120—127.
54. Bemerkungen zu dem Aufsatz „Über die Äquivalenz dynamischer Probleme", von Erwin Schuntner, Wien, Mh. Math. Phys. 39 (1932), 241—243.
55. Bemerkungen über das Integral $\int_0^\infty z^s e^{-e^z} dz$, Mh. Math. Phys. 39 (1932), 239—241.
56. Über eine Minimalaufgabe im Gebiete der analytischen Funktionen, Mh. Math. Phys. 39 (1932), 377—384.
57. Ein anderer Beweis des Satzes, daß zwei singularitätenfreie Kurven von einer Ordnung $n \geqq 4$ notwendig kollinear sind, wenn sie eindeutig aufeinander bezogen sind, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 3 (1932), 145—147.

58. Über das Fehlerglied bei numerischer Integration, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), 166—168.
59. Gustav v. Escherich (Nachruf), Mh. Math. Phys. 42 (1935), 1—6.
60. Konrad Zindler (Nachruf), Mh. Math. Phys. 42 (1935), 215—220.
61. Note zur Theorie der schlichten Funktionen, Studia Math. 4 (1933), 66—69.
62. Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie, S. B. Akad. Wiss. Wien, 145 (1936), 96—99.
63. Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in euklidischer und hermitscher Maßbestimmung, Mh. Math. Phys. 44 (1936), 343—365.
64. Berichtigung zu der Arbeit „Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie", S. B. Akad. Wiss. Wien, 145 (1936), 529.
65. Der Satz von Bezout und eine Integralinvariante, Mh. Math. Phys. 45 (1937), 332—334.
66. Ein Integralsatz über analytische Gebilde im Gebiete von mehreren komplexen Veränderlichen, Mh. Math. Phys. 45 (1937), 418—431.
67. Lie's Translationsmannigfaltigkeiten und Abelsche Integrale, Mh. Math. Phys. 46 (1938), 384—431.
68. Über eine Minimalaufgabe im Gebiete der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen, Mh. Math. Phys. 47 (1939), 426—431.
69. Translationsmannigfaltigkeiten, welche zu Kurven von Geschlecht Null oder Eins gehören, Mh. Math. Phys. 48 (1940), 30—40.
70. Zur Theorie mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, S.-B. preuß. Akad. Wiss. (1942), Math. Naturwiss. Kl. Nr. 4, 2—9.
71. Integrale dritter Gattung und linear polymorphe Funktionen, Mh. Math. Phys. 51 (1944), 101—114.

Printed in Austria.