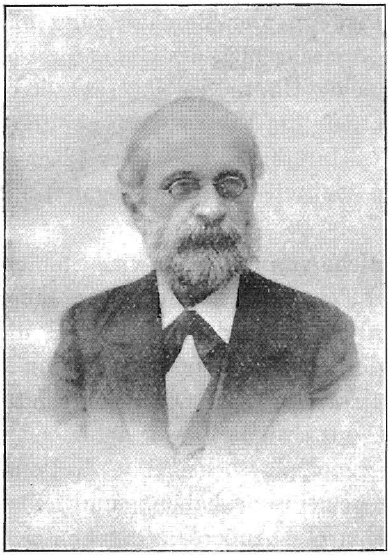
Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XXXIV. 1925. Heft 1/4.
Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Rudolf Sturm †.

Von W. LUDWIG in Dresden.



R. Sturm

Ein stilles und arbeitsreiches Gelehrtenleben endete, als Rudolf Sturm, Geheimer Regierungsrat und ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Breslau, am 12. April 1919 die Augen zum letzten Schlummer schloß. Geboren am 6. Januar 1841, bezog Sturm im Jahr 1859 die Universität seiner Vaterstadt Breslau, promovierte am 24. Juni 1863, und war vom Herbst desselben Jahres an als Lehrer am Gymnasium zu Bromberg tätig. Ostern 1872 übersiedelte er als Professor für darstellende und neuere Geometrie sowie für graphische Statik an die Technische Hochschule Darmstadt; 1878 wurde er nach Münster und 1892 als Nachfolger seines Lehrers Heinrich Schröter nach Breslau berufen, wo er seine Vorlesungstätigkeit erst wenige Wochen vor seinem Tode einstellte.[1]) Von seiner Dissertation an bis in seine letzten Tage hat Sturm unermüdlich wissenschaftlich gearbeitet und eine literarische Tätigkeit von einem Umfang entwickelt, den völlig auszumessen in einer kurzen Skizze unmöglich ist; doch soll im folgenden versucht werden, seine Forschungen wenigstens in ihren wesentlichsten Zügen darzustellen.

Die ausgesprochene geometrische Begabung Sturms fand in Schröter einen verständnisvollen Pfleger und in der, damals noch in hoher Blüte stehenden synthetischen Geometrie ein Feld lohnender Betätigung. Unter den zahlreichen Problemen, deren rein geometrische Behandlung Jakob Steiner durch — wie er es in seiner letzten Zeit liebte — beweislos

1) Näheres über das Leben Rudolf Sturms bringt der Nachruf von W. Lorey im 50. Band der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

veröffentlichte Sätze anregte, fand die Untersuchung der Flächen dritter Ordnung besondere Beachtung; hier konnte Sturm bereits in seinen ersten Arbeiten mit Erfolg eingreifen und wesentliche Fortschritte erzielen. Er bewies zunächst in seiner Inaugural-Dissertation[2]) „De superficiebus tertii ordinis disquisitiones geometricae" einen großen Teil der Sätze, die Steiner am 31. Januar 1856 der Berliner Akademie vorgelegt hatte[3]), und wurde bald darauf zu erneuter Beschäftigung mit diesen Fragen veranlaßt durch das erste Ausschreiben des Steinerpreises (1864). Im Jahr 1866 wurde ihm die eine Hälfte des Preises zuteil, während die andere an Luigi Cremona fiel; die Preisschrift erweiterte er zu seinem ersten Buch[4]) „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung" und ist auch später in mehreren Abhandlungen[5]) auf diesen Gegenstand zurückgekommen.

In der „Dissertation" geht Sturm nicht von einer der vier Steinerschen Erzeugungsarten der kubischen Fläche aus, sondern von einer Erzeugungsart, die Hermann Graßmann[6]) gefunden hatte, und die Schröter einem, mit der Dissertation gleichzeitigen Aufsatz[7]) zugrunde legte. Er definiert demgemäß die Fläche F^3 als den Ort der Schnittpunkte je dreier entsprechenden Ebenen aus drei kollinear aufeinander bezogenen Bündeln (P_1), (P_2), (P_3) und findet, da sechsmal je drei entsprechende Ebenen eine ganze Gerade gemeinsam haben, unmittelbar sechs windschiefe, auf F^3 liegende Geraden G_i. Außerdem ergeben sich zwei auf F^3 verlaufende kubische Raumkurven C_{12}, C_{13} als Orte der

---

2) Vratislaviae 1863. Künftig angeführt als „Dissertation".

3) „Über die Flächen dritten Grades". Ges. Werke II, S. 649, und Journ. f. Math. Bd. 53, S. 133 (1857).

4) Leipzig 1867. Künftig angeführt als „Synthetische Untersuchungen".

5) Insbesondere:

„Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung". Journ. f. Math. Bd. 88. S. 213. (1879.)

„Über die Kurven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung". Math. Ann. Bd. 21. S. 457. (1882.)

„Über die 27 Geraden der kubischen Fläche". Math. Ann. Bd. 23. S. 289. (1883) — im Anhang eine Zusammenstellung der bis dahin bekannten 13 Erzeugungsarten.

„Über die Erzeugung der Fläche dritter Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel". Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 10. S. 216. (1906.)

„Bemerkung zu Cremonas Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung". Journ. f. Math. Bd. 134. S. 288. (1908.)

„Ein- und Zweischaligkeit von Flächen 3. Ordnung". Journ. f. Math. Bd. 153. S. 1. (1924.)

6) „Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen". Journ. f. Math. Bd. 49. S. 47. (1855.)

7) „Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung". Journ. f. Math. Bd. 62. S. 265. (1863.)

Schnittpunkte von Strahlen, die einander in den Kollineationen zwischen (P_1) und (P_2) und zwischen (P_1) und (P_3) entsprechen: sie haben jede Gerade G_i zur Doppelsekante und bilden mit ihr die Grundkurven (G_i, C_{12}), (G_i, C_{13}) zweier Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die durch je einen Ebenenbüschel aus (P_1) im Verein mit den ihm in (P_2) und (P_3) entsprechenden Ebenenbüscheln erzeugt werden. Je zwei solche Flächen zweiter Ordnung sind einander so zugeordnet, daß sie außer G_i noch einen Strahl aus (P_1) und einen auf F^3 liegenden Kegelschnitt gemeinsam haben; alle diese Kegelschnitte schicken ihre Ebenen durch dieselbe Gerade L_i, die wieder auf F^3 verläuft, und fünf von ihnen zerfallen in die Geradenpaare (G_k, g_{ik}) — $k \neq i$ —. Hierdurch folgen aus den 6 Geraden G_i 6 ebenfalls windschiefe Geraden L_i und 15 Geraden g_{ik} — $g_{ik} \equiv g_{ki}$ —, im ganzen also 27 Geraden; sie bilden 45 Dreiecke, und aus diesen ergibt sich die Unmöglichkeit einer achtundzwanzigsten Geraden.

Über die „Dissertation" hinausgehend behandeln die „Synthetischen Untersuchungen" auch die vier Steinerschen Erzeugungsarten und eine, ebenfalls auf Graßmann zurückgehende und von F. August seinen überwiegend analytischen Entwickelungen[8]) zugrunde gelegte Erzeugungsart; es ist wohl als ihr besonderes Verdienst anzusprechen, daß sie den Zusammenhang zwischen diesen Erzeugungsarten aufdecken und in klassischer Klarheit darlegen. Neben der Graßmannschen erweist sich die zweite Steinersche Erzeugungsart als die allgemeinste; sie definiert die Fläche F^3 als den Ort der Kegelschnitte, in denen die entsprechenden Elemente eines Flächenbüschels zweiter Ordnung und eines auf ihn projektiv bezogenen Ebenenbüschels einander durchdringen. Von den Geraden der Fläche liefert sie unmittelbar die Achse des Ebenenbüschels und, da 5 Ebenen desselben die ihnen entsprechenden Flächen zweiter Ordnung berühren, 5 Geradenpaare, die jene schneiden, während die übrigen 16 Geraden sich als die Treffgeraden von irgend vier der erzeugenden Kegelschnitte ergeben. Das gegenseitige Verhältnis dieser und der Graßmannschen Erzeugungsart stellt nun Sturm dadurch klar, daß er — auf Grund einer eingehenden, die Ergebnisse der Analysis benutzenden Auseinandersetzung über die imaginären Elemente der Geometrie — bei beiden die Möglichkeiten untersucht, die für das Vorhandensein reeller, punktiert-imaginärer und voll-imaginärer Geraden bestehen; es zeigt sich, daß die zweite Steinersche Erzeugungsart dieselben fünf Gattungen reeller Flächen dritter Ordnung liefert, die bereits L. Schlaefli[9]) und August[10]) auf analytischem Wege gefunden hatten,

8) Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis. Dissert. inaug. Berolini 1862.

9) Quart. Journ. of Mathem., t. II. 10) A. a. O.

daß dagegen die Graßmannsche Erzeugungsart nur zu vier von ihnen führt, solange man sich reeller und in reeller Kollineation stehender Bündel bedient. Übrigens erscheint bei der Graßmannschen Erzeugungsart die Fläche F^3 auch als Erzeugnis des Flächenbüschels zweiter Ordnung mit der Grundkurve (G_i, C_{12}) und des Ebenenbüschels mit der Achse L_i, wobei aber keine der Geraden G_i und L_i reell zu sein braucht. Außerdem aber ist F^3 — zugleich mit der Ebene, die den Bündelscheitel P_1 und die Gerade G_i verbindet, — auch als Erzeugnis der beiden Flächenbüschel zweiter Ordnung, deren Grundkurven (G_i, C_{12}) und (G_i, C_{13}) sind, aufzufassen; infolgedessen untersucht Sturm die Möglichkeiten dafür, daß eine Fläche dritter Ordnung als Sonderfall einer durch zwei projektive Flächenbüschel zweiter Ordnung erzeugten Fläche vierter Ordnung entstehen kann. Aber eine noch allgemeinere Erzeugungsart der Fläche F^3 entwickelt er: Sind bei der Graßmannschen Erzeugungsart a_1, a_2, a_3 drei einander entsprechende Strahlen der Bündel (P_1), (P_2), (P_3), so erzeugen die projektiven Ebenenbüschel um a_1 und a_2 eine Fläche zweiter Ordnung, die durch die kubische Raumkurve C_{12} geht und von a_3 in zwei Punkten von F^3 getroffen wird; also ist F^3 der Ort der Schnittpunkte zwischen den Flächen des durch C_{12} bestimmten Flächennetzes zweiter Ordnung und den ihnen eindeutig zugeordneten Strahlen des Bündels (P_3). Die Verallgemeinerung nun besteht darin, daß das besondere Flächennetz zweiter Ordnung durch ein solches mit acht Grundpunkten ersetzt, und daß jeder Punkt von F^3 als Bündelscheitel P_3 genommen werden kann.

Ferner behandelt Sturm in den „Synthetischen Untersuchungen" und in den unter [5]) aufgeführten Abhandlungen die Konfiguration der 27 Geraden, die Polarentheorie und die Arten der Kurven, die auf einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung möglich sind. Die Polarentheorie wird in der „Dissertation" und in den „Synthetischen Untersuchungen" durch eine Übertragung des Verfahrens gewonnen, mit Hilfe dessen E. de Jonquières[11]) die Polarentheorie der ebenen Kurven begründet hatte; die erste Polarfläche eines Punktes O in bezug auf die Fläche F^3 ist der Ort der Punkte X, die auf jedem durch O gehenden Strahl durch seine Schnittpunkte A, B, C mit F^3 vermöge der Gleichung

$$\left(\frac{1}{OX}-\frac{1}{OA}\right)\left(\frac{1}{OX}-\frac{1}{OB}\right)+\left(\frac{1}{OX}-\frac{1}{OB}\right)\left(\frac{1}{OX}-\frac{1}{OC}\right)+\left(\frac{1}{OX}-\frac{1}{OC}\right)\left(\frac{1}{OX}-\frac{1}{OA}\right)=0$$

bestimmt werden. In der ersten unter [5]) angeführten Abhandlung je-

11) Liouville, Journal de Mathématiques, s. II, t. II, p. 249 (1857).

doch gelingt es Sturm, nach dem Vorbild von A. Milinowski[12]) die Polarentheorie der Fläche F^3 so, wie er es längst gewünscht hatte, auf einer ihrer Erzeugungsarten, und zwar auf der von ihm entdeckten allgemeinsten aufzubauen; er konstruiert zuerst für jeden Punkt P von F^3 selbst, indem er ihn zum Scheitel des Strahlenbündels nimmt, der zusammen mit einem Flächennetz zweiter Ordnung die Fläche F^3 erzeugt, die erste Polarfläche als das Erzeugnis des Strahlenbündels und des Ebenenbündels, den die Polarebenen von P in bezug auf die Flächen des Netzes bilden; hieraus leitet er dann die erste Polarfläche jedes beliebigen, nicht auf F^3 liegenden Punktes O ab und entwickelt dann die übrigen Tatsachen der Polarentheorie.

Zwei weitere Abhandlungen sind noch zu erwähnen, die eng mit den „Synthetischen Untersuchungen" zusammenhängen. Die „Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung"[13]) vervollständigen die Sätze, die sich bei Gelegenheit der vierten Steinerschen Erzeugungsart der Fläche dritter Ordnung — als des Ortes der Pole einer Ebene in bezug auf alle Flächen zweiter Ordnung, die ein Netz bilden — ergeben hatten. Der Aufsatz[14]) „Die Römische Fläche von Steiner" dualisiert auf Grund der Bemerkung Cremonas[15]), daß diese Fläche zu einer kubischen Fläche mit vier Knoten reziprok ist, die zweite Steinersche Erzeugungsart der Fläche dritter Ordnung, und spezialisiert sie so, daß die Römische Fläche als Einhüllende ihrer Tangentialebenen entsteht. Endlich rechtfertigt es die Ausführlichkeit, die Sturm in der Vorrede und im sechsten Kapitel seiner „Synthetischen Untersuchungen" dem Imaginären in der Geometrie widmet, an dieser Stelle auch seine Abhandlung[16]) „Über die v. Staudtschen Würfe" zu erwähnen; in ihr entwickelt er — angeregt durch J. Lüroth[17]), der im engen Anschluß an G. K. C. v. Staudt vorgeht und die formale Seite besonders berücksichtigt, — mehr geometrische Beweise für die Grundgesetze des Rechnens mit Würfen; ferner stellt er die Schnittpunkte eines reellen Kegelschnittes k und einer ihn nicht reell schneidenden reellen Geraden d durch den Pol D von d in bezug auf k dar, und hiernach, indem er k

12) „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Kurven dritter bzw. vierter Ordnung". Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 21, S. 427 (1876), und Bd. 23, S. 85 (1878).

13) Journ. f. Math. Bd. 70. S. 212. (1869.)

14) Math. Ann. Bd. 3. S. 76. (1870.)

15) „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre". Journ. f. Math. Bd. 68. S. 1. (1868.)

16) Math. Ann. Bd. 9. S. 333. (1876.)

17) „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudtschen Theorie." Math. Ann. Bd. 8. S. 145. (1875.)

als den scheinbaren Umriß einer nicht geradlinigen Fläche zweiter Ordnung auffaßt, durch die beiden Punkte der Fläche, deren Risse in D vereinigt sind, so daß sich durch Vermittelung der komplexen Zahlen eine Abbildung der Gaußischen Zahlenebene sowohl auf das zweiblättrige Innere von k als auch auf die Fläche zweiter Ordnung ergibt.

Bald nach seinen „Synthetischen Untersuchungen wandte Sturm sich dem auf G. K. C. v. Staudt und M. Chasles[18]) zurückgehenden „Problem der Projektivität" zu und behandelte es in einer Reihe von Abhandlungen[19]) als erster unter einheitlichem Gesichtspunkte. Bei dem ebenen Problem liegen in zwei ebenen Feldern zwei Gruppen von Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ und $B_1, B_2, \ldots B_n$ vor, und es sollen solche Paare „assoziierter" Punkte P, Q gefunden werden, daß für die Strahlenbüschel (P) und (Q) die Beziehung

$$P(A_1, A_2, \ldots A_n) \barwedge Q(B_1, B_2, \ldots B_n)$$

gilt. Insbesondere genau untersucht Sturm die Cremonasche Verwandtschaft fünften Grades, die für $n = 5$ sich zwischen den beiden Feldern ergibt; sie besitzt in jedem Feld sechs untereinander linear abhängige Hauptpunkte zweiter Ordnung $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_0$ und $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_0$, von denen A_0 als der zu allen Punkten des Kegelschnittes $(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5)$ und B_0 als der zu allen Punkten des Kegelschnittes $(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$ assoziierte Punkt zu konstruieren ist; die sechs Punktepaare sind völlig gleichartig, so daß jedes von ihnen das sechste sein kann, und ebenso die Kegelschnitte $(A_1 A_2 A_3 A_4 A_0)$, $(B_1 B_2 B_3 B_4 B_0)$ usw., die die Hauptkurven der Verwandtschaft sind. — Für $n = 7$ gibt es drei Paare assoziierter Punkte, die für die Photogrammetrie Bedeutung haben; ihre Konstruktion ist eine kubische Aufgabe, kann sich jedoch unter Umständen zu einer quadratischen vereinfachen. Dies ist ins-

18) v. Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 262. (1847.) Chasles, Nouv. Ann. de math., t. 14, p. 50 (1855). Vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. III, 1¹, A. Schoenflies, Projektive Geometrie, Nr. 16.

19) „Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades". Math. Ann. Bd. 1. S. 533. (1869.)
„Das Problem der räumlichen Projektivität". Math. Ann. Bd. 6. S. 513. (1873.)
„Das Problem der Kollineation". Math. Ann. Bd. 10. S. 177. (1876.)
„On correlative pencils". Proc. Lond. Math. Soc. t. VII. (1876.)
„Über korrelative oder reziproke Bündel". Math. Ann. Bd. 12. S. 254. (1877.)
„Vereinfachung des Problems der räumlichen Projektivität". Math. Ann. Bd. 15. S. 407. (1879.)
„Über Kollineation und Korrelation". Math. Ann. Bd. 22. S. 569. (1883.)
„Zum Problem der Kollineation von Bündeln". Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. 19. S. 185. (1910.)

besondere der Fall bei der von Sturm gegebenen Konstruktion der Fläche zweiter Ordnung, die neun gegebene Punkte $A, B, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ trägt: Projiziert man $C_1, C_2, \ldots C_7$ aus A und B auf eine beliebige Ebene in die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_7$ und $B_1, B_2, \ldots B_7$, so ist in dem Spurpunkt, den die Gerade AB in der Ebene hat, das eine Paar in bezug auf jene Gruppen assoziierter Punkte vereinigt; die anderen beiden Paare P_1, Q_1 und P_2, Q_2 können also, wenn sie reell sind, mit Lineal und Zirkel konstruiert werden und liefern dann zwei Paare projektiver Ebenenbüschel

$$AP_\varkappa(C_1, C_2, \ldots C_7) \barwedge BQ_\varkappa(C_1, C_2, \ldots C_7) \qquad \varkappa = 1, 2,$$

deren Erzeugnisse die beiden Regelscharen der gesuchten Fläche sind.

Um das Problem auf den Raum zu übertragen, setzt Sturm räumliche Punktgruppen voraus und sucht das eine Mal nach dem Vorgang von H. Müller[20]) Paare assoziierter Achsen p, q derart, daß für die Ebenenbüschel $(p), (q)$

$$p(A_1, A_2, \ldots A_n) \barwedge q(B_1, B_2, \ldots B_n),$$

und das andere Mal Paare assoziierter Punkte P, Q derart, daß für die Bündel $(P), (Q)$

$$P(A_1, A_2, \ldots A_n) \text{ kollinear } Q(B_1, B_2, \ldots B_n)$$

wird. Diese räumlichen Probleme ähneln dem ebenen; aber es treten an die Stelle der Kegelschnitte, die sich bei diesem für $n = 4$ finden, beim ersten von ihnen für $n = 4$ tetraedrale Komplexe, und beim zweiten für $n = 5$ kubische Raumkurven. Das erste räumliche Problem ergibt erst für $n = 11$ eine endliche Anzahl — 20 — von Paaren assoziierter Achsen, während das zweite mit drei Paaren assoziierter Punkte für $n = 7$ schließt. — Zu der höchsten erreichbaren Verallgemeinerung gelangt Sturm endlich dadurch, daß er zu den Punktgruppen auch Gruppen von Ebenen und Geraden hinzufügt und nicht nur nach kollinearen, sondern auch nach korrelativen Bündeln fragt; die Ergebnisse werden naturgemäß immer verwickelter und beruhen auf Abzählungen, bei denen sich Sturm vorzugsweise auf die von T. A. Hirst[21]) für Systeme von Korrelationen ausgebildete Charakteristikentheorie stützt.

Die ersten Untersuchungen Sturms über die Flächen dritter Ordnung und über das Problem der Projektivität sind die Wegweiser seines

20) „Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung" § 2 — Math. Ann. Bd. 1, S. 407 (1869) —, wo die Hauptsätze für $n = 4, 5, 6, 7$ abgeleitet sind.

21) „On the correlation of two planes". London Math. Soc.-Proc., t. 5, p. 40. (1874.)

wissenschaftlichen Entwickelungsganges geworden; an sie schließen sich nicht nur unmittelbar die bereits genannten Abhandlungen an, sondern noch zahlreiche weitere Arbeiten über einzelne Fragen aus der Theorie der Flächen und Kurven[22]), über Kurvensysteme[23]), über Strahlenörter[24]) und über geometrische Verwandtschaften[25]). Von diesen seien hier nur

---

22) Insbesondere:

„Über Singularitäten der allgemeinen Fläche n-ter Ordnung". Journ. f. Math. Bd. 72. S. 350. (1870.)

„Über die Flächen mit einer endlichen Anzahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und der fünften Ordnung". Math. Ann. Bd. 4. S. 249. (1871.)

„Über Fußpunkt-Kurven und Flächen, Normalen und Normal-Ebenen". Math. Ann. Bd. 6. S. 241. (1873.)

„Über Normalen an algebraischen Flächen". Math. Ann. Bd. 7. S. 567. (1874.)

„Zur Theorie der algebraischen Flächen". Math. Ann. Bd. 9. S. 573. (1876.)

„Über die ebenen Kurven dritter Ordnung". Journ. f. Math. Bd 90. S. 85. (1881.)

„Über das Geschlecht von Kurven auf Kegeln". Math. Ann. Bd. 19. S. 487. (1882.)

„Rein geometrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen". Journ. f. Math. Bd. 105. S. 101. (1889.)

„Metrische Eigenschaften der kubischen Raumkurve". Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 40. S. 1. (1895.)

„Zur Jacobischen Erzeugung der Flächen zweiten Grades". Journ. f. Math. Bd. 122, S. 263 (1900), und Bd. 140, S. 33 (1911).

23) „Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von kubischen Raumkurven. Journ. f. Math. Bd. 79, S. 99; Bd. 80, S. 128 und 334. (1875.)

„Durch Tangenten bestimmte kubische Raumkurven". Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 23. S. 1. (1915.)

„Das System der kubischen Raumkurven mit drei gegebenen Tangenten und seine Ausartungen". Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 27. S. 1. (1918.)

24) Außer einzelnen unter [19]), [22]), [23]), [25]) angeführten Abhandlungen mit liniengeometrischen Ergebnissen noch die folgenden:

„Sulle forze in equilibrio". Ann. di Matem., s. II, t. VII, p. 217 (1876).

„Über Strahlenkongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade". Journ. f. Math. Bd. 101. S. 162. (1887.)

„Über höhere räumliche Nullsysteme". Math. Ann. Bd. 28. S. 277. (1887.)

„Über die Zahl und Lage der singulären Punkte bei Strahlenkongruenzen zweiter Ordnung". Gött. Nachr. 1888. S. 468.

„Einteilung der Strahlenkongruenzen mit Brenn- oder singulären Linien". Math Ann. Bd. 36. S. 467. (1890.)

„Über die sogenannten Strahlen-Kongruenzen ohne Brennfläche". Hamb. Mitteil. Bd. 2. S. 61. (1890.)

„Über den allgemeinen Komplex zweiten Grades". Berl. Ber. 1894. S. 697.

„Die Komplexpunktepaare und die konsingulären Komplexe eines Komplexes zweiten Grades". Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 22. S. 22. (1914.)

25) Außer den unter [19]) und [26]) angeführten Abhandlungen:

„Über die reziproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften". Math. Ann. Bd. 19. S. 461. (1882.)

die[26]) besprochen, in denen Sturm die Kollineationen und Korrelationen untersucht, die Flächen zweiter Ordnung oder kubische Raumkurven in sich selbst überführen. Zunächst entwickelt Sturm, den algebraischen Apparat seiner Vorgänger vermeidend, rein geometrisch die Bedingungen, unter denen Flächen zweiter Ordnung durch eine allgemeine Kollineation in erster Art — d. h. so, daß jede Regelschar auf sich selbst — oder in zweiter Art — d. h. so, daß jede Regelschar auf die zweite Regelschar derselben Fläche projektiv bezogen wird — oder durch eine Korrelation in zweiter Art je in sich selbst verwandelt werden; er untersucht ferner bei der allgemeinen Korrelation die Lage der beiden stets vorhandenen Flächen zweiter Ordnung, die je sich selbst in erster Art entsprechen, und behandelt auch die wichtigsten Unterfälle, wobei zwei von anderen auf andere Weise gefundene Tatsachen in einer Folgerung erscheinen, nämlich die räumliche Korrelation, die, ohne ein Polarsystem zu sein, zusammenfallende Kernflächen hat, und die Fläche zweiter Ordnung, die zu sich selbst polar in bezug auf eine zweite ist, ohne diese längs eines Kegelschnittes zu berühren. Die entsprechenden Untersuchungen für die kubischen Raumkurven sind völlig neu und zeitigen verwandte Ergebnisse.

Im engsten Zusammenhang mit den meisten der bisher genannten Aufsätze stehen die beiden großen Werke Sturms, „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung"[27]) und „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften"[28]). In ihnen verwob Sturm die Ergebnisse seiner eigenen Forschung mit denen

---

„Beispiele zu den Cremonaschen ebenen Transformationen". Math. Ann. Bd. 26. S. 304. (1886.)

„Über gleiche Punktreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel, bei kollinearen Räumen". Math. Ann. Bd. 28. S. 261. (1887.)

„Zur Theorie der Kollineation und Korrelation". Math. Ann. Bd. 28. S. 268. (1887.)

„Über diejenigen Cremonaschen Verwandtschaften, bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen dritter Ordnung im andern entsprechen". Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. Bd. 14. S. 18. (1905.)

„Ausgezeichnete Elemente projektiver Gebilde, die ineinander liegen, und Folgerungen für die Homologien". Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. Bd. 27. S. 166. (1918.)

„Herstellung von Polaren". Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. Bd. 27. S. 175. (1918.)

26) „Über Flächen zweiten Grades, welche zu sich selbst polar sind". Math. Ann. Bd. 25. S. 236. (1885.)

„Über Kollineationen und Korrelationen, welche Flächen zweiten Grades oder kubische Raumkurven in sich selbst transformieren". Math. Ann. Bd. 26. S. 465. (1886.)

27) Leipzig. Teil I: 1892. Teil II: 1893. Teil III: 1896.

28) Leipzig. Bd. I und II: 1908. Bd. III und IV: 1909.

seiner Zeitgenossen, durch Anmerkungen den Ursprung der einzelnen Fragestellungen aufdeckend und die von ihm selbst an ihnen geleistete Arbeit andeutend; deshalb darf auf sie hinsichtlich des Inhaltes der vielen Abhandlungen, die hier nur nach ihrem Titel angeführt werden konnten, verwiesen werden. Aber über diese Schilderung seiner eigenen Lebensarbeit hinaus schuf Sturm in den beiden Werken eine umfassende Darstellung der Teile des geometrischen Wissens, deren Entwickelung seine Tätigkeit gewidmet war. Ebenso wie fast allen seinen Abhandlungen[29]) gab er auch seinen Büchern einen durchaus synthetischen Aufbau; sein — öfters auch ausdrücklich ausgesprochenes — Bestreben ist es, für Sätze, die mit den Mitteln der analytischen Geometrie gewonnen wurden, „mehr geometrische" Beweise zu geben. Aber es tritt auch in seinem Schaffen die Tragik der synthetischen Geometrie zutage, die darauf beruht, daß die rein anschaulichen und konstruktiven Methoden, die den Anfängen der synthetischen Geometrie ihre bestrickende Feinheit verleihen, in der geradlinigen Verfolgung der ursprünglichen Fragestellungen sobald die Grenzen ihrer Kraft erreichen; dann müssen, um den synthetischen Beweisgang aufrecht erhalten zu können, aus Algebra und Analysis entlehnte Begriffe und Grundsätze zu Hilfe gezogen werden, die zwar das rechnerische Verfahren der Koordinatengeometrie zu vermeiden gestatten, aber auch in ihrer nicht durchaus geklärten Vermischung mit rein geometrischen Schlüssen Zweifeln Raum geben, wie sie sich gegen gewisse Ergebnisse der abzählenden Geometrie erhoben haben.

Sturm erkannte sehr wohl die Ermüdung der höheren synthetischen Geometrie und wandte bewußt, wie er selbst gelegentlich äußerte, sein Interesse der Elementargeometrie zu, der er eine größere Anzahl kleinerer Abhandlungen[30]) widmete; er knüpfte dabei überwiegend an drei viel frühere Aufsätze[31]) an, in denen er Steiners Untersuchungen über

29) Als eine der wenigen Ausnahmen sei der Aufsatz „Darstellung binärer Formen auf der kubischen Raumkurve" (Journ. f. Math. Bd. 86, S. 116, 1879) erwähnt; in ihm gewinnt Sturm eine reiche Fülle von Sätzen über die kubische Raumkurve und die mit ihr zusammenhängenden Strahlenörter dadurch, daß er — von der Parameterdarstellung der Kurve ausgehend — binäre Formen dritten und vierten Grades nebst zu ihnen polaren oder apolaren Formen geometrisch deutet.

30) Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 1913—1919. — Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. Bd. 22 (1913). — Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 5 (1903) und Bd. 24 (1916). — Journ. f. Math. Bd. 143 (1913) und Bd. 152 (1923).

31) „Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum". Journ. f. Math. Bd. 96. S. 36. (1884.)

Maxima und Minima wieder aufgenommen hatte, und sammelte seine Ergebnisse in dem Buch[32]) „Maxima und Minima in der elementaren Geometrie“. Sein Ziel, das bereits Steiner als erstrebenswert bezeichnet hatte, ist es, die Vergleichung zweier geometrischen Größen durch ein Verfahren zu leisten, das nicht durch einen unendlichen Prozeß das Extrem asymptotisch erreichen läßt, sondern nur einer endlichen Anzahl von Schritten benötigt. Zwar führt auch dieser Weg nicht zu einem stichhaltigen Existenzbeweis eines Maximums oder Minimums, aber er liefert zahlreiche interessante Sätze und bereichert die Elementargeometrie um einen Stoff, der zur Übung des geometrischen Denkens in den höheren Schulen wohl geeignet ist.

Endlich sind noch zu erwähnen Sturms Nekrologe auf H. Schröter[33]) und L. Cremona[34]), die Besorgung der dritten Auflage des von Schröter bearbeiteten zweiten Teiles von Steiners „Vorlesungen über Synthetische Geometrie“, die Herausgabe[36]) von Steiners Abhandlung „Einige geometrische Betrachtungen“ und das Lehrbuch[37]) „Elemente der darstellenden Geometrie“, das, in Sturms Darmstädter Zeit für die Studierenden der Technik geschrieben, in zweiter Auflage für die Bedürfnisse der Kandidaten des höheren Schulamtes umgearbeitet erschien, und, sich im wesentlichen auf geradlinige und ebenflächige Gebilde beschränkend, diese mit großer Sorgfalt behandelt. Hiermit ist wohl das Bild von Sturms Lebenswerk in seinen wesentlichen Zügen umrissen; es bliebe aber unvollständig ohne einen Hinweis auf den heiligen Eifer, mit dem er auch seine Lehrtätigkeit anfaßte, und der sich insbesondere in seinen Seminaren auswirkte, den Lässigen wohl manchmal unbequem, den Strebsamen aber — wie eine stattliche Anzahl von Dissertationen beweist — eine Quelle nachhaltigster Belehrung.

„Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minimum“. Journ. f. Math. Bd. 97. S. 1. (1884.)

„Über den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten“. Journ. f. Math. Bd. 97. S. 49. (1884.)

32) Leipzig und Berlin, 1910.

33) Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. Bd. 2. S. 32. (1893.)

34) Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 8. S. 11 u. S. 195. (1905.)

35) Leipzig 1898.

36) Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 123. (1901.)

37) Leipzig 1874, ital. Übersetzung von G. Jung. 1878. Zweite Aufl. 1900.

(Eingegangen am 18. 4. 24.)