

Faber

SCHRIFTEN
DER HESSISCHEN HOCHSCHULEN
UNIVERSITÄT GIESSEN

Jahrgang 1931 Heft 2

Moritz Pasch

Zwei Gedenkreden

gehalten am 24. Januar 1931

von

Dr. Friedrich Engel

o. Prof. der Mathematik
an der Universität Gießen

und

Dr. Max Dehn

o. Prof. der Mathematik
an der Universität Frankfurt a. M.



1931

VERLAG VON ALFRED TÖPELMANN IN GIESSEN

Am 24. Januar 1931 veranstaltete die Philosophische Fakultät auf Anregung des mathematischen Seminars eine Gedenkfeier für Moritz Pasch in der „kleinen Aula“. Der Rektor, zahlreiche Dozenten mit ihren Angehörigen, Verwandte und auswärtige befreundete Fachgenossen des Entschlafenen hatten sich eingefunden zu einer Stunde weihvoller Erinnerung an den großen Mathematiker, der von der Schwelle des Mannesalters bis zu seinem hochbetagten Ende der unsrige war:

Moritz Pasch wurde geboren am 8. November 1843 in Breslau, studierte dort und in Berlin und habilitierte sich in Gießen am 29. November 1870. Hier verblieb er bis zu seinem Tode (20. September 1930 in Homburg v. d. H.).

Zu Ehren des trefflichen Menschen, des bedeutenden Lehrers und bahnbrechenden Forschers beschloß die Philosophische Fakultät, die auf der Feier gehaltenen Reden der Herren Prof. Dr. Engel und Prof. Dr. Dehn durch Drucklegung zu erhalten. Das am Schluß beigefügte Gedicht wurde von unserem verstorbenen Kollegen Honigmann zu Paschs 80. Geburtstage verfaßt.

Gießen, im März 1931.

W. J. Schmidt
Dekan der philosophischen Fakultät.

Wir haben uns heute hier versammelt, um das Gedächtnis von Moritz Pasch zu feiern. In einer Beziehung hat Pasch wohl nicht seines Gleichen in der ganzen Geschichte der Universität Gießen, denn fast volle 60 Jahre hat er ununterbrochen unsrer Hochschule angehört. Auch die Stadt Gießen wird nicht viele Bürger aufzuweisen haben, die, von auswärts zugewandert, ihr so lange treu geblieben sind. Allen seinen Kollegen, die ihm näher getreten waren, kam es so vor, als ob man sich die Universität und die Stadt Gießen gar nicht ohne ihn denken könnte. Wieviele Kollegen hatte man im Laufe der Jahre kommen und wieder von Gießen scheiden sehen, wievielen hatte man das letzte Geleit gegeben, er, der länger hier war als sie alle, erschien als der ruhende Pol in der Erscheinungen Flucht. Zwar konnte man sich nicht verhehlen, daß er körperlich hinfälliger wurde, auch abgesehen von den Hemmungen, die ihm die immer mehr schwindende Sehkraft brachte; da er aber geistig noch so rege war, wie nur je, dachte man gar nicht ernstlich daran, daß auch er abberufen werden könnte, und es war eine recht wehmütige Überraschung, als man hörte, daß er am 20. September 1930 in Homburg v. d. H., wo er Abwechslung und damit Erholung gesucht hatte, entschlafen war. Er hatte zuletzt noch einige schwere Leidenstage durchzumachen gehabt, zum Glück nicht viele. Diese waren ihm durch die treue Pflegerin seiner letzten Jahre nach Möglichkeit erleichtert worden, aber niemand von seinen Angehörigen weilte an seinem Sterbelager und, nachdem er sechs Jahrzehnte in Gießen gelebt hatte, mußte er seinen letzten Kampf in fremder Umgebung ausfechten, nicht in den vertrauten Räumen seines Gießener Heims.

Äußerlich ist Paschs Leben sehr einfach verlaufen. Seit er am 29. November 1870 in Gießen Privatdozent geworden war, hat er seine Kraft nur unsrer Landeshochschule und seiner Wissenschaft gewidmet. Dagegen waren ihm allerdings in Familienkreise höchst schmerzliche Erfahrungen beschieden. Nachdem ihm die Gattin viel zu früh entrissen worden war, mußte er auch die beiden Töchter hergeben, die sehr glücklich

verheiratet waren, und die ihn jede mit zwei Enkelkindern beschenkt hatten. Die eine wurde ihm ganz plötzlich entrissen und er mußte auch noch den Schmerz erleben, daß ihr einer hoffnungsvoller Sohn in der Blüte der Jahre dahinschied. Die zweite Tochter erlag einem schweren Leiden, das sie Jahr und Tag von dem Kreise ihrer Familie fern gehalten hatte. Aber alle diese schweren Schicksalsschläge trug er mit rührender Fassung. Er äußerte zwar, daß es ihm schmerzlich sei, in seinem Alter noch alles das erleben zu müssen, nie jedoch war ihm die geringste Spur von Verbitterung anzumerken.

Auch seine Laufbahn an der Universität Gießen war einfach und weicht in keiner Weise von der üblichen ab. Er wurde zwar schon drei Jahre nach seiner Habilitation, 1873, ao. Professor und 1875 ordentlicher, nachdem er einen Ruf auf eine ao. Professur an seiner Heimatuniversität Breslau abgelehnt hatte, aber erst 1888 erhielt er das bis dahin einzige etatmäßige mathematische Ordinariat, als dieses durch den Tod von Baltzer frei geworden war. Er hat 1883 das Dekanat bekleidet und 1893—94 das Rektorat. Dieses letztere ist die einzige Gelegenheit, wo er öffentlich aufgetreten ist. Er hat sein Amt mit der ihm eigenen Gewissenhaftigkeit verwaltet und, wie er selbst zuweilen erzählte, den Amtsgeschäften sehr viel Zeit gewidmet. Volle 18 Jahre lang hat er den Vorsitz in der wissenschaftlichen Prüfungskommission geführt und sich dabei als wohlwollender Berater der Kandidaten, als ein wahrer Studentenvater bewiesen. Seine unermüdliche Arbeitskraft, seine Geschäftsgewandtheit und reiche Erfahrung hat er jederzeit in den Dienst der Universität gestellt. Auf einem Gebiete hatte er dabei unbestritten die Führung, auf dem der Satzungen. Bei einer Universität wie Gießen, die noch ein gut Teil Selbstverwaltung in die neue Zeit gerettet hat, ist die Zahl dieser Satzungen größer als anderwärts, und es verstand sich von selbst, daß bei der Umarbeitung alter Satzungen und bei der Abfassung neuer er in erster Linie berufen wurde, den einzelnen Bestimmungen die rechte Form zu geben und den endgültigen Wortlaut festzustellen. Solange er der philosophischen Fakultät und dem Senate angehörte, ist wohl keine Satzung in Kraft getreten, deren Ausarbeitung nicht wesentlich ihm zu verdanken gewesen wäre. Auch seine Eigenschaft als Vorsitzender der Prüfungskommission stellte ihn vor ähnliche Auf-

gaben, denn es handelte sich des öfteren um Neubearbeitung der Prüfungsordnung. Er erwähnt selbst, daß diese Art von Arbeiten große Verwandtschaft mit den Aufgaben hat, die er sich als Mathematiker stellte, der lückenlosen Darstellung aller Schlüsse und der Ermittlung aller erforderlichen Axiome.

Um sich mehr seinen wissenschaftlichen Arbeiten widmen zu können, legte Pasch den Vorsitz der Prüfungskommission nieder, aber er fand bald, daß die dadurch bewirkte Entlastung nicht ausreichte. So ließ er sich denn 1911, nach fast 41 jähriger Lehrtätigkeit, pensionieren. Das hatte damals in Hessen noch die Folge, daß er überhaupt auf jede Lehrtätigkeit verzichten mußte und auch an den Geschäften von Fakultät und Senat nicht mehr teilnehmen konnte. Als später für die Professoren auch in Hessen die sogenannte Emeritierung eingeführt wurde, die diese Beschränkungen nicht mit sich bringt, da erhielt er wieder Einladungen zu den Fakultäts- und Senatsitzungen. Leider verblieb es für seine Person bei der Pensionierung, denn deren nachträgliche Umwandlung in Emeritierung wurde zwar von der Universität angeregt, war aber, selbst bei einem so verdienten Manne, etwas so Undenkbares, daß sie gar nicht ernstlich in Erwägung gezogen wurde. Überaus gewissenhaft, wie er war, betrachtete er daher jene Einladungen als nicht zu Recht bestehend und hat, soviel ich weiß, niemals an einer solchen Sitzung teilgenommen.

Im Ruhestande war es ihm vergönnt, alle Gedenktage und Jubiläen zu erleben, die vorkommen können. Er feierte den 70., den 80., den 85. Geburtstag. Zum 70., am 8. November 1913, wurde ihm von seinen ehemaligen Schülern, von Freunden und Verehrern die lebensgroße Plakette überreicht, die heute hier aufgestellt ist und die seit kurzem eine Zierde unseres mathematischen Seminars ist. Zum 80. wurde er von zwei Fakultäten zugleich, der einen in Frankfurt a. M., der andern in Freiburg i. Br., ehrenhalber zum Dr. phil. nat. ernannt. Er feierte das 50 jährige und das 60 jährige Doktorjubiläum, das 50 jährige als Dozent, als ao. und als ordentlicher Professor und zwar konnte er ja, was besonders bemerkenswert ist, an jedem der drei letzten Gedenktage auf fünf Jahrzehnte zurückblicken, die er ohne Unterbrechung an der Gießener Hochschule zugebracht hatte. Nur das 60 jährige Dozentenjubiläum

war ihm nicht mehr zu erleben vergönnt. Er hätte das am letzten 29. November feiern können.

Pasch gehört nicht zu den Mathematikern, die in jungen Jahren die Welt durch neue und überraschende Entdeckungen in Erstaunen setzen. Er war 39 Jahre alt, als er 1882 das Werk veröffentlichte, das ihn in der ganzen mathematischen Welt bekannt gemacht hat und das vor allem ihm in der Geschichte der mathematischen Wissenschaft ein dauerndes Andenken sichert. Es sind das seine „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Aber auch dieses Werk wurde zunächst nur von wenigen Fachgenossen beachtet, und es dauerte Jahre, bis die Erkenntnis durchdrang, daß hier zum ersten Male eine systematische Untersuchung der Grundlagen und der Axiome der Geometrie durchgeführt war. Das Werk wurde der Vorläufer einer überaus großen Anzahl von Untersuchungen ähnlicher Art von anderer Seite und hat den Anstoß zu der neueren Grundlagenforschung und Axiomatik gegeben, die in den letzten Jahrzehnten mit großem, fast muß man sagen, mit zu großem Eifer betrieben worden ist. Pasch aber betrachtete seine Behandlung der Geometrie nur als einen ersten Vorstoß in dieser Richtung. Er bearbeitete selbst die Grundlagen der Analysis in ähnlicher Weise, ja er bemühte sich, die allerersten Anfänge des mathematischen Denkens überhaupt aufzuhellen und die Denkvorgänge, die dabei zur Anwendung kommen, in ihre kleinsten Bestandteile zu zerlegen, um alle Quellen etwaiger Irrtümer aufzudecken und verstopfen zu können. Der Beiname eines „Vaters der Axiomatik“, den man ihm im Scherze gegeben hat, wird ihm wohl auf die Dauer verbleiben. Ganz besonderes Gewicht legte er auf die Darstellung, die, wie er mit Recht meinte, bei den meisten Mathematikern sehr zu wünschen übrig läßt. Es wäre ein unschätzbare Gewinn, wenn sein Beispiel in dieser Beziehung rechten Einfluß gewänne und Nachahmung fände. Er selbst war sich aber wohl bewußt, daß die ungemein strengen Anforderungen, die er stellte, kaum vollständig zu erfüllen waren, und daß das Ziel, das er sich steckte, für den einzelnen gar nicht erreichbar war, daß man vielmehr nur hoffen konnte, durch die immer erneute Arbeit kommender Mathematiker dieses Ziel näher und näher zu kommen, ohne jemals wirklich am Ziele zu sein.

Mit diesen allgemeinen Andeutungen über Paschs wissenschaftliche Leistungen muß ich mich begnügen. Dagegen möchte ich nicht unterlassen, über Pasch als Lehrer etwas zu sagen. Seinen großen Anforderungen in Bezug auf die Darstellung suchte er selbstverständlich auch in seinen Vorlesungen zu genügen. Diese waren infolgedessen inhaltlich und in der Form musterhaft, klar und wohlgedacht. Darin stimmen alle überein, die ihn gehört haben. Sie erklären jedoch zugleich, daß Pasch an seine Zuhörer sehr große Ansprüche stellte. Seine Vorlesungen boten daher zwar den Fortgeschritten ungemein viel Anregung und Förderung, dagegen konnten ihm nur wenige Anfänger wirklich folgen.

In den letzten Jahren, ja Jahrzehnten, wird wohl jeder Gießener Pasch von Ansehen gekannt haben, auch wenn er den Namen nicht wußte. Der alte Herr, einst ein rüstiger Fußgänger und eifriges Mitglied des Rennklubs, war oft zu sehen, wie er langsam und vorsichtig die Straßen entlang ging, eine Erscheinung, die niemandem entgehen konnte. Aber nur sehr wenige Bewohner Gießens ahnten, daß der Name dieses anspruchlosen Mannes bei den Mathematikern der ganzen Welt wohl bekannt und hoch geachtet war.

Wer mit ihm zusammentraf, der mußte unbedingt den Eindruck gewinnen, daß er einer Persönlichkeit gegenüberstand, die jedermann mit ungeheucheltem Wohlwollen entgegnet. Ich erinnere mich noch selbst dieses Eindrucks, als ich ihm zum ersten Male begegnete, 1896 in Frankfurt, auf einer der wenigen Naturforscherversammlungen, die er besucht hat. Dieses Wohlwollen war nicht etwa bloß äußere Form, es kam ihm von Herzen. Ganz in der Stille gab er gern und hat manche Not lindern helfen. Jede Aufdringlichkeit, jedes sich geltend machen, war ihm fremd. Die Bescheidenheit, mit der er jedermann gegenüber auftrat, war keineswegs angenommen, sondern durchaus echt. Obwohl er niemandem seine Ansicht aufdrängte, merkte man doch im Umgange mit ihm sofort, daß er eine in sich fest gegründete Persönlichkeit war, seines Wertes bewußt, ein Mann, der seinem Ziele mit unbeirrbarer Folgerichtigkeit nachging, ohne sich durch die Mode oder durch Rücksichten auf die Meinung anderer beirren zu lassen. Seine Urteile über andere Mathematiker waren immer maßvoll, maßvoll war auch seine Polemik gegen solche, die

seine Ansichten bekämpften. Die Gespräche mit ihm würzte ein herzerquickender Humor, der niemals boshaft wurde, den ihm auch die schweren Erlebnisse seines Alters nicht rauben konnten. Mit gutem Humor trug er sogar die großen Unbequemlichkeiten, die mit der fortschreitenden Abnahme seines Sehvermögens verbunden waren. Konnte er doch in den letzten Jahren nur mit Hülfe von starken Vergrößerungsgläsern lesen und das kleine Feld, das er so überblicken konnte, schrumpfte immer mehr zusammen. Er ließ sich zwar vorlesen, aber er klagte doch, daß er bei wissenschaftlichen Entwicklungen immer das eine über dem andern vergesse. Es ist begreiflich, daß er unter diesen Umständen oft das Bedürfnis hatte, unter Menschen zu sein und ein Gespräch über wissenschaftliche Fragen oder über die Ereignisse des Tages zu führen. Sein Gehör hatte zum Glück gar nicht gelitten, sondern war bis zuletzt von bemerkenswerter Schärfe. Er freute sich daher über jeden, der ihn aufsuchte, und kam jederzeit gern, wenn er von einer befreundeten Familie geladen wurde. Auch versammelte er noch zuweilen einen größeren Kreis von Bekannten bei sich. Die wissenschaftliche Arbeit ließ er selbst in den letzten Jahren nie ganz ruhen, obgleich die Schwierigkeiten, die ihn dabei hinderten, fast unüberwindlich schienen.

So schwer sein Leben auch in den letzten Jahren war: Pasch hat das Alles mannhaft ertragen. Die geistige Frische ist ihm bis ins höchste Alter ungeschwächt verblieben. Er hat sein Tagewerk vollendet, wie es wenigen vergönnt ist. Bei allen, die ihm näher getreten sind, hat er sich ein dankbares Andenken gesichert. Aber auch dann, wenn wir alle, die ihn befreundet waren, nicht mehr sind, wird sein Name nicht vergessen sein, sondern in der Geschichte seiner Wissenschaft fortleben.

Eine Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen ist die Aufgabe, der der zweite Teil unserer heutigen Gedächtnisfeier gewidmet sein soll. Hören wir, was Herr Kollege Deln aus Frankfurt a. M. uns darüber zu sagen hat.

Friedrich Engel.

Wir wollen versuchen, uns von den wissenschaftlichen Leistungen Moritz Pasch' eine Vorstellung zu machen. Dazu ist es gut, daß wir zunächst darstellen, wie sich die Mathematik in den 50 Jahren vor dem Beginn der Tätigkeit von Pasch entwickelt hat. In diese Zeit fällt zunächst eine großartige Erweiterung des mathematischen Feldes. Die Untersuchung der projektiven Eigenschaften der Figuren eröffnete ein neues Reich der Geometrie. Um dieses auch analytisch zu beherrschen, mußten neue algebraische Methoden geschaffen werden, die ihrerseits wieder die Geometrie bereicherten. In der reinen Algebra wurde das Problem der Lösbarkeit von Gleichungen vollständig erledigt, und aus diesen Untersuchungen entwickelte sich als neue Disziplin die Gruppentheorie. Die Funktionentheorie, auf das Gebiet der komplexen Größen ausgedehnt, lieferte wunderbare neue Funktionen, die auch für die Anwendung der Mathematik auf die Physik große Bedeutung hatten. Die Zahlentheorie endlich benutzte zum ersten Male systematisch funktionentheoretische Methoden, die in geheimnisvolle Tiefen der Lehre von den Primzahlen führten. Man kann diese Zeit deswegen mit Recht noch zu der heroischen Epoche der Mathematik rechnen, die mit den Entdeckungen der Renaissance begann. Aber sie ist auch eine Zeit der Wende. Es ist merkwürdig, wie von ganz verschiedenen Seiten her diese neue Phase angeregt wurde. Zunächst waren es Erscheinungen in der Theorie der reellen Funktionen, die einerseits für die Anwendungen bedeutend waren, andererseits zwangen, die Symbolverknüpfungen in der Analysis schärfer auf ihre reale geometrische und arithmetische Bedeutung hin zu untersuchen. Stetige Funktion und Irrationalzahl sind Begriffe, die durch diese Untersuchungen besonders geklärt wurden. Um sie zu erforschen, mußte man auf die Grundlagen der Arithmetik und die Grundeigenschaften der stetig ausgebreiteten Zahlenmannigfaltigkeit, des Kontinuums, eingehen. Es erhob sich die Frage: worauf beruht unsere Sicherheit in den mathematischen Folgerungen, was bedeuten sie, in den der Anschauung unmittelbar zugäng-

lichen Formen ausgedrückt? Das Fundament unserer Wissenschaft wurde stärker gemacht. Der systematische Zusammenhang der Sätze in der Theorie der reellen Funktionen wurde aufgedeckt. Von ganz anderer Seite kam eine ähnliche Wirkung, nämlich von der Forschung in den Grundlagen der Geometrie, die uns wegen Pasch hier ganz besonders interessiert. Der spekulative und zugleich kritische Geist am Anfang des vorigen Jahrhunderts überwand die zweitausend Jahre alte Schwierigkeit in der Behandlung der Geometrie ohne Parallelenaxiom. Durch Kritik und Spekulation zugleich wurde erkundet, was für Erscheinungen auftreten, wenn das Parallelenaxiom nicht gilt, dann aber wurde das vom Parallelenaxiom freie geometrische System, die Nicht-Euklidische Geometrie, aufgerichtet. Ein ungeheurer Fortschritt wurde so in der Mathematik durch die gleichzeitige Leistung von Bolyai und Lobatschewskij gemacht. Die Abhängigkeit geometrischer Sätze von einander wurde erkannt: z. B. der Satz von der Winkelsumme im Dreieck folgt nicht ohne Parallelenaxiom; daß die Lote im Dreieck sich in einem Punkte schneiden, folgt ohne Parallelenaxiom. Auch von Seiten der neuen, projektiven Geometrie aus wurde man zu der Nicht-Euklidischen Geometrie geführt, als man, wieder im Geiste dieser Zeit, versuchte, die Sätze der projektiven Geometrie abzuleiten nur auf Grund projektiver Grundsätze, als man also versuchte, eine innere Geschlossenheit in den Bau der projektiven Geometrie von unten an hereinzubringen. Wir haben hier wieder das Problem der Struktur einer mathematischen Disziplin vor uns. Die Nicht-Euklidische Geometrie kommt natürlich hierbei zur Geltung, weil das Parallelenaxiom kein projektiver Grundsatz ist; denn ein Paar von Parallelen wird durch Projektion in ein Paar sich schneidender Geraden verwandelt. Auch die Untersuchung krummer Flächen führte auf die Nicht-Euklidische Geometrie, denn hier zeigte es sich, vor allem durch die Untersuchungen von Gauß, daß man von einer „inneren“ Geometrie auf diesen Flächen sprechen kann, die sich unabhängig von dem die Fläche umgebenden Raum entwickeln läßt. Manche dieser Flächen haben sogar genau dieselben Eigenschaften wie Teile der Nicht-Euklidischen Ebene, wenn man nur die geometrischen Gebilde der Ebene in geeigneter Weise auf den Flächen interpretiert. Wir haben auch

hier eine Strukturuntersuchung; die Dinge selbst sind ganz verschieden, aber ihre Verknüpfungen haben dieselben Eigenschaften. Die weitere Entwicklung dieser Überlegungen führt, nebenbei bemerkt, über Riemann (1854) zu Einstein, der auch die Struktur der dynamischen Phänomene bei der universellen Attraktion durch die inneren Eigenschaften eines vierdimensionalen Gebildes darstellen konnte. Noch in anderen Gebieten äußert sich diese Tendenz, und weitere Entdeckungen verstärken sie. Es genügt für unsere Zwecke, auf die vorhin schon erwähnte Gruppentheorie hinzuweisen. Sie betrachtet Systeme von Dingen, die in besonders einfacher Weise miteinander verknüpft sind, ja sie wurde allmählich die Theorie dieser Systeme von Verknüpfungen selbst, ohne Berücksichtigung der Dinge, die mit einander verknüpft wurden. So lieferte gerade die Gruppentheorie eine Sammlung von Strukturen, die für die neuen Untersuchungen besonders der geometrischen Gebilde von unschätzbbarer Bedeutung waren.

Diese Phase der Strukturuntersuchungen, der Untersuchungen der reinen Verknüpfungen, damit verbunden die Auffindung von Analogien in den verschiedensten Gebieten, von Übertragungsprinzipien, dauert noch heute an, ja vielleicht stehen wir noch im Anfang der Entwicklung. Für uns ist von besonderer Wichtigkeit die Untersuchung der Struktur der Mathematik selbst, oder einzelner mathematischer Disziplinen; d. h. auch die mathematischen Sätze sind mit einander verknüpft: aus einer Satzsammlung S folgt ein gegebener Satz A , oder A folgt nicht aus S . So bildet also eine mathematische Disziplin selbst wieder gleichsam eine Figur, und die Verknüpfungen zwischen den Elementen dieser Figur können mathematisch untersucht werden. Die mathematische Betrachtung der Mathematik selbst entstand und hat zu wichtigen Ergebnissen geführt. Auf Arbeiten dieser Art ist die einzigartige Bedeutung von Pasch gegründet.

In 65 Jahren hat er fast ununterbrochen mathematische Arbeiten vollendet. Ein großer Teil dieser Arbeiten, alle Arbeiten der ersten 17 Jahre, gehören nicht zu dem genannten Gebiet. Sie beziehen sich auf algebraisch-geometrische Fragen. In diesem Gebiet war Pasch nur einer von Vielen;

man kann wohl manchen Namen finden, der für die algebraische Geometrie eine größere Bedeutung hat als der von Pasch. Seine Strukturarbeiten, wenn ich so sagen darf — er selbst nannte sie Arbeiten über heikle Mathematik — gliedern sich in vier Teile: Grundlagen der Geometrie, Grundlagen der Arithmetik, Verbindung der Geometrie mit der Anschauung, Struktur der mathematischen Methode. In den Grundlagen der Geometrie ist Pasch von klassischer Bedeutung, d. h. sein Name wird immer ein Stück Weges bedeuten, das der Grundlagen-Mathematiker gehen wird. In den Grundlagen der Arithmetik hat er eine Struktur in dem System der Eigenschaften der ganzen Zahlen nachgewiesen, was für alle diejenigen von Bedeutung ist, die sich mit der Strukturierung dieses Systems beschäftigen. In den beiden anderen Gebieten hat er die aufopfernde Anfangsarbeit geleistet für eine der Zukunft vorbehaltene wichtige Entwicklung.

Unsere Aufgabe ist die Schilderung der wissenschaftlichen Leistung, aber dies doch nicht allein. Was ist bloße Wissenschaft ohne die menschliche Persönlichkeit, die sie geschaffen hat? Ich will deswegen versuchen, auch das für die wissenschaftliche Arbeit bedeutungsvolle Persönliche darzustellen. Daß ich aber mit einem wissenschaftlichen Grundriß angefangen habe, ist wohl im Sinne von Pasch. Denn von Wissenschaft meinen wir ja etwas zu verstehen, und von diesem festen Grund aus soll sich deswegen die Darstellung erheben. An die Darstellung von Persönlichem sind wir weniger gewöhnt, und in jedem Fall bleibt dabei allzuviel Subjektives. Aber wie wichtig doch das Persönliche ist, erkennt man schon daran, daß Pasch zweifellos aus einem sittlichen Erkenntnistrieb nicht aus raffendem Trieb nach zu entdeckenden Sätzen oder aus sportlichem Vergnügen gerade die Grundlagen der Mathematik behandelt hat. Denn sonst hätte er nicht das undankbare Gebiet der Grundlagen der Arithmetik oder der Struktur mathematischer Beweise jahrzehntelang bis in sein höchstes Alter bearbeitet.

Zunächst wollen wir uns, wenn auch nur kurz, mit den algebraischen Arbeiten von Pasch beschäftigen. Mit ihnen hat er seine mathematische Produktion begonnen. Er hatte in Breslau gemeinsam mit seinem Lebensfreunde Jakob Rosanes studiert und bei Heinrich Schroeter Anregungen empfangen,

Methoden der Algebra zur Bewältigung geometrischer Probleme anzuwenden. Es handelt sich hier hauptsächlich um solche Methoden, die im zweiten Viertel des vorigen Jahrhunderts geschaffen wurden und deren glänzendster Vertreter Otto Hesse in Heidelberg war. Das Hauptmittel dieser Methode war der von Jacobi und Cayley geschaffene Determinantenkalkül, ferner die Identitäten zwischen Formen, d. h. solchen Polynomen, deren Glieder sämtlich denselben Grad in den Variablen haben. Diese Methode ist in der Folgezeit außerordentlich bereichert worden durch das Hinzukommen neuer Kalküle, nämlich des Rechnens mit Zahlkomplexen, entweder mit bestimmten höheren komplexen Zahlen wie den Größen von Grassmann und Hamilton, oder mit den allgemeinen Komplexen von n^2 Zahlen, den sogenannten Matrizen oder Tensoren. Der Determinantenkalkül ist nur ein ganz spezieller Fall dieses Matrizenkalküls. Diese neuen Methoden, die schon vor Beginn der Tätigkeit von Pasch entstanden waren, hat Pasch nie angewandt. Ihm lag das Mystisch-Revolutionäre fern, das mit der Vorliebe für das Operieren mit überanschaulichen Größen eng verbunden ist.

Den wichtigsten Untersuchungsgegenstand in der algebraischen Geometrie bilden die Invarianten, das heißt solche Ausdrücke in den Koeffizienten einer Form oder einer Transformation, die bei projektiver Transformation erhalten bleiben: Bei einer projektiven Transformation möge die Form mit den Koeffizienten a in die Form mit den Koeffizienten a' übergehen und eine Funktion I der Koeffizienten a gleich derselben Funktion der Koeffizienten a' sein, abgesehen von einem Faktor, der nur von der projektiven Transformation abhängt. Dann nennt man I eine Invariante. Es ist klar, daß diese Invarianten die größte Rolle bei der Untersuchung der projektiven Eigenschaften der geometrischen Gebilde spielen müssen. Die Invariantentheorie wurde teils kurz vor Pasch's Beginn, teils mit diesem zusammenfallend erweitert einerseits durch symbolische Prozesse, also eine Art Invariantenkalkül, andererseits durch Aufdeckung einer höheren Art von Invarianten, der Elementarteiler, die nicht algebraische Funktionen der Koeffizienten sind, sondern ganze Zahlen, die von den Teilbarkeitseigenschaften gewisser Koeffizientenausdrücke abhängen. Auch von diesen Methoden hat Pasch keine Anwendung gemacht, ebensowenig

wie von der Gruppentheorie. Das lag, wie er selbst sagte, an seiner Eigenart. Er hat nicht leicht neue, komplizierte Methoden angenommen. Er war selbst zu einfach, denkend und zu originell. Diese Eigenart kam auch bei seiner Vorlesungstätigkeit zum Ausdruck. Er hat mir einmal seine Verwunderung über die Dozenten ausgesprochen, die so leicht über jedes Gebiet der Mathematik Vorlesungen halten können. Er selbst hat sich immer auf bestimmte Gebiete beschränkt.

Nun einige Probleme, die von Pasch behandelt wurden: Seine erste Arbeit (1864/65, mit Rosanes gemeinsam) bezieht sich auf geschlossene Polygone von n Seiten, die einer Ellipse einbeschrieben und einer zweiten Ellipse umbeschrieben sind. Zwischen den Koeffizienten der diese beiden Ellipsen darstellenden Gleichungen bestehen Beziehungen. Das Problem reizt zur Anwendung der elliptischen Funktionen, die auch in der ersten Arbeit verwandt wurden. In der zweiten denselben Gegenstand betreffenden Arbeit von 1869 wird dieses fremde Gewand abgestreift und das Problem in eleganter Weise algebraisch erledigt. Seine Habilitationsschrift (Gießen 1870) behandelt die Mannigfaltigkeiten, die wohl zuerst von Plücker im zweiten Viertel des XIX. Jahrh. untersucht wurden, nämlich Mannigfaltigkeiten von Geraden im Raum. Hier handelt es sich um dreifach unendliche algebraische Mannigfaltigkeiten von Raumgeraden, die sogenannten Linienkomplexe. Schon Plücker hatte bei solchen Komplexen zweiten Grades bemerkt, daß es in ihnen eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von ausgezeichneten Geraden gibt, die eine charakteristische Brennfläche besitzt. Diese wird nun von Pasch für allgemeine Komplexe nachgewiesen. Diese Arbeit wurde von F. Klein einige Jahre später in den „Fortschritten der Mathematik“ besprochen. Klein war Schüler von Plücker, und seine ersten Arbeiten bezogen sich ebenfalls auf die Liniengeometrie. Die Verbindung der mathematischen Arbeiten von Klein mit denen von Pasch sollte später noch von viel größerer Bedeutung werden.

In einer Arbeit vom Jahre 1876 behandelt Pasch spezielle Fälle des interessanten Problems: Wann ist eine Form von n Variablen durch projektive Transformation in eine Form von weniger Variablen überführbar? Das identische Verschwinden einer bestimmten Determinante, der Hesseschen Determinante, deren Elemente die zweiten Ableitungen der Form nach den

Variablen sind, ist eine notwendige Bedingung. Hesse selbst meinte, daß diese Bedingung auch hinreichend sei. Pasch beweist dies für spezielle Fälle. Im selben Jahre wurde das Problem von Gordan und Noether aufgegriffen und vollständig gelöst. Es zeigte sich, daß Hesse unrecht hatte. — Bis zu dem Jahre 1880 sind alle Arbeiten in dem Crelleschen Journal erschienen. Von da an veröffentlicht Pasch seine Arbeiten in den Mathematischen Annalen. Vielleicht drückt sich hierin eine nähere Verbindung mit Klein aus. Eine ganze Reihe von Annalen-Arbeiten beschäftigt sich mit den speziellen Arten von projektiven Verwandtschaften in der Ebene. Es werden einfache geometrische Bedingungen dafür angegeben, daß eine von den rationalen Invarianten der Transformation verschwindet. Überall ist es Pasch darum zu tun, anschauliche Resultate zu gewinnen und die algebraischen Verhältnisse möglichst reinlich und übersichtlich darzustellen. Tiefere Hilfsmittel anzuwenden, hat er, wie gesagt, stets verschmäht. An diese Arbeiten schließen sich auch Gießener Dissertationen und Arbeiten sonstiger Mathematiker an.

Pasch hat immer großen Wert auf seine algebraische Produktion gelegt. Auf dem Felde, wo er seine jugendlichen Kräfte zuerst übte, hat er bis über das achtzigste Jahr hinaus gearbeitet. Seine letzte Annalen-Arbeit ist noch ein kleiner Beitrag zur algebraischen Geometrie. Es war für ihn sicher stets eine Genugtuung, daß er diese Methode vollständig beherrschte; er hat gerne die beruhigende Gewißheit empfunden, im mathematischen Handwerk ein Meister zu sein.

Jetzt wenden wir uns wieder dem Teil der Pasch'schen Tätigkeit zu, der für uns bei weitem am wichtigsten ist, seinen Forschungen auf dem Gebiete der Grundlagen. Im Jahre 1882 erschien sein erstes selbständiges Werk: „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Dies Buch hat keine Vorgänger, viele Nachfolger. Es bezeichnet den Anfang einer neuen Epoche in der Kenntnis des Menschen von seinen eigenen Werken. Ehe wir an eine Darstellung des Inhalts gehen, wollen wir die Vorbedingungen für die Entstehung des Buches betrachten. Pasch hat neben dem Unterricht bei Schroeter in Breslau auch die Vorlesungen von Lipschitz, dann aber vor allem in Berlin (nach seiner Promotion in Breslau 1865, als 21jähriger) die Vorlesungen von Kronecker und Weierstraß gehört. Durch diese Männer kam er in Berührung mit der besinnlichen Strömung in der

Mathematik des 19. Jahrhunderts, mit den Bestrebungen, die Substruktur des hohen Baus der Mathematik, speziell der Arithmetik und der Analysis, zu erkennen. „Zu derselben Zeit wie Pasch stand auch Georg Cantor unter dem Einfluß der Vorlesungen von Kronecker und Weierstraß. Es ist merkwürdig, wie dasselbe Milieu so ganz Verschiedenes in den beiden verschiedenen Männern hervorrief. In Cantors dem Mystisch-Spekulativen zugeneigtem Geist entstand aus den Weierstraß'schen Grundlagen der Analysis die Mengenlehre, die weit über das direkt menschlich Anschauliche hinaus die Regionen des Transfiniten bewohnt, wo der Mensch sich über sich selbst schwingt und den verschiedenen aktual-unendlichen Individuen, den freien Schöpfungen der Phantasie, anschauliche Namen erteilt und sie miteinander verknüpft nach den in den Regionen des Anschaulichen geltenden Gesetzen. Pasch dagegen führte das Gehörte dazu, überall in seinen Vorlesungen, ob sie nun das Gebiet der Geometrie oder der Analysis betrafen, auf den Grund zurückzugehen und immer eingehender und liebevoller ins Einzelne auflösend diesen Grund zu betrachten und darzulegen. Das entspricht eben seiner besonderen Anlage, die sich, wie er in seiner Selbstschilderung sagt, schon auf der Schule gezeigt und ihn eigentlich zum Studium der Mathematik geführt hat.

Und nun gehen wir einen Schritt näher an das Buch heran. In der Vorrede heißt es: „daß die projektive Geometrie unabhängig von der Parallelentheorie besteht und sich ohne deren Zuziehung begründen läßt, hat zuerst Herr F. Klein bemerkt und mehrfach erörtert.“ Kleins Gedankengang war etwa so: 1. Die Verknüpfungen von Punkten, Geraden und Ebenen sind nach Einführung der unendlichfernen Elemente, der unendlichfernen Ebene und ihrer Punkte und Geraden, projektiv invariant. 2. Die harmonische Lage von zwei Punktpaaren ist projektiv invariant, wie sich leicht aus den räumlichen Verknüpfungen ableiten läßt. 3. Durch sukzessive Konstruktion von harmonischen Quadrupeln kann man von drei gegebenen Punkten einer Geraden ausgehend ein beliebiges Punktquadrupel dieser Geraden annähern. Durch diese Konstruktion ist jedem Punktquadrupel eine Zahl zugeordnet, das sogenannte Doppelverhältnis, das bei Projektion unverändert bleibt. Drei Punkte auf einer Geraden haben nur mit einem vierten Punkt der Geraden ein vorgegebenes Doppel-

verhältnis. 4. Mit Hilfe der beiden Sätze über das Doppelverhältnis ist die projektive Geometrie leicht aufzubauen, etwa in der Art der „Geometrie der Lage“ von Chr. v. Staudt (dessen Lehrstuhl in Erlangen F. Klein eine Zeitlang inne hatte).

Klein hatte aber diesen Gedankengang nur skizziert, und seine Durchführung bot einige erhebliche Schwierigkeiten. Zunächst mußte Punkt 1 abgeändert werden, was natürlich Klein selbst bemerkt hatte. Gerade die Einführung der unendlichfernen Ebene erfolgt ja auf Grund des Parallelenaxioms. Was war ohne das Parallelenaxiom zu machen? Bolyai und Lobatschewskij hatten die Nicht-Euklidische Welt mit den unendlichfernen Elementen als Grenzen der endlichen Elemente abgeschlossen. Zwei Geraden einer Ebene hatten dementsprechend einen endlichen Punkt oder einen der beiden auf jeder Geraden gelegenen unendlichfernen Punkte oder gar keinen Punkt gemeinsam. Hier entstand also zunächst ein großer Widerspruch mit den projektiven Verknüpfungsregeln, die ausnahmslos gelten müssen. Dies Problem hatte schon Klein erfaßt und konnte zu seiner Lösung gelangen, weil er als Repräsentanten der Nicht-Euklidischen Geometrie die von Cayley aufgestellte künstliche Geometrie erkannt hatte. Da sah Klein, daß die supraunendlichen Elemente, die Elemente, die jenseits der Grenzen des metrisch Erreichbaren liegen, als Zentren von Geradenbüscheln resp. als Axen von Ebenenbüscheln aufgefaßt werden können, ebenso wie man durch eine Schar von Parallelen einen unendlichfernen Punkt bestimmt usw. So sagt er: „Hier anknüpfend kann man rein geometrisch solche idealen Elemente definieren, wobei nur Übung dazu gehört, um sich gerade so sicher in diesen idealen Gebilden wie in den gleichbenannten wirklichen Gebilden zurecht zu finden“ (1873). Hier setzt Pasch ein, aber mit einer ganz anderen Einstellung wie Klein. Ihm genügt nicht die Sicherheit, sich in diesen idealen Gebilden zurechtzufinden, sondern er will ihre Eigenschaften vollständig auf die Eigenschaften der wirklichen Gebilde zurückführen. Denn wenn man für die wirklichen Gebilde noch die Anschauung als Leiterin der Schlüsse zulassen kann, für die idealen Gebilde besteht ja nur das Vertrauen, daß sich dort dieselben Verhältnisse vorfinden wie bei den wirklichen Gebilden. Klein macht aus Antipathie gegen die nicht intuitive, sondern rein logische Schlußweise in seiner eigentlich künstlerischen Einstellung einen

Fehler im Selbstbeobachten. Er merkt nicht, daß er bei dem „anschaulichen Operieren mit den idealen Elementen“ das Bild der Nicht-Euklidischen Geometrie in der Cayley'schen Form der Wirklichkeit substituiert. Pasch entwickelt aber gerade an dieser Stelle zuerst den axiomatischen Standpunkt. Denn mit den idealen Gebilden verbindet sich keine Anschauung, also darf ich nur aus den für sie abgeleiteten Eigenschaften schließen. Diese Eigenschaften müssen aber, soweit sie projektiv sind, formal mit den Eigenschaften der wirklichen Elemente übereinstimmen. Also werde ich dazu geführt, ein für die (projektiv-) geometrischen Schlüsse vollständiges System der Eigenschaften der wirklichen Elemente aufzustellen: die Axiomatik ist geboren. Aber Klein schreibt noch 1890 mit besonderem Hinweis auf Pasch: „In der mathematischen Literatur scheint mir betr. der Axiome fast allgemein eine Ansicht verbreitet, welche von derjenigen abweicht, die ich für richtig halte und von der ich in meinen früheren hierher gehörigen Arbeiten Gebrauch gemacht habe, ohne mir des Widerspruchs gegen andere Meinungen deutlich bewußt zu sein. Die betr. Ansicht geht dahin, daß die Axiome die „Tatsachen“ der räumlichen Anschauung formulieren und zwar so vollständig, daß es bei geometrischen Betrachtungen unnötig sein soll, auf die Anschauung als solche zu rekurrieren, es vielmehr genügt, sich auf die Axiome zu berufen. Ich möchte zunächst den zweiten Teil dieses Satzes bestreiten. Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich.“ Für Pasch ist aber die Geometrie gleichzeitig empirisch, also Naturwissenschaft, in der Herleitung der Kernsätze, der Axiome, und ganz rein deduktiv in ihrem Aufbau aus den Kernsätzen. Klein hat entschieden Unrecht, soweit es sich wenigstens um den Aufbau der projektiven Geometrie handelt, denn mit den idealen geometrischen Elementen selber hat auch er nicht intuitiv operieren können, sondern er übertrug vertrauensvoll das für die wirklichen Elemente Evidente. Für Klein ist gerade das anschauliche Schließen das Wesentliche an der Geometrie. So wie sie algebraisch behandelt wird, wird sie nicht mehr als Geometrie angesehen. Für Klein gibt es neben der sprachlich logischen auch eine anschaulich logische Form der Deduktion. Das ist eine sehr interessante Idee, aber sie wird jedenfalls

heute durchaus nicht als richtig empfunden. Freilich gebrauchen wir auch in der strengsten axiomatischen Geometrie heute noch Figuren und schließen intuitiv mit Hilfe der Figuren. Aber wir haben wenigstens die moralische Überzeugung, daß jeder der Schlüsse unanschaulich, rein deduktiv gemacht werden könnte, und mehr kann man zur Zeit nicht verlangen; denn einstweilen ist es ja noch ein unberechenbar weiter Weg bis zur völligen Algebraisierung der Geometrie auf jeder Stufe und in allen ihren Erscheinungen.

Wir führen noch Pasch's eigene Worte aus seiner Selbstschilderung an: „Von dem, der an der Mathematik weiterbaut, wird von Alters her verlangt, daß sein Gedankengang sich auf reine Schlußfolgerungen aus dem Vorhandenen zurückführen läßt; erscheinen in dem Gedankengang Begriffe oder Sätze, die dem nicht entsprechen, so sind diese als neue Grundbegriffe oder neue Grundsätze (neue Axiome) zu betrachten. In dem jedesmal Vorhandenen müssen sich daher gewisse Begriffe und Sätze als Grundbegriffe und Grundsätze erweisen, während alles andere aus diesen abgeleitet ist. . . . Auf jeder Stufe der Entwicklung . . . ist das Lehrgebäude der Mathematik erst haltbar, wenn sich ein in sich widerspruchsfreier Kern herausheben und der ganze Inhalt aus dem Kern folgern läßt.“

In die Gesamtheit der Strukturuntersuchungen reiht sich die Arbeit von Pasch so ein, daß er versucht, zu den einzelnen Hauptgebieten, der Geometrie und Arithmetik, eine Sammlung von Kernsätzen zu finden, aus denen alle anderen Sätze rein deduktiv folgen, und die ihrerseits wieder möglichst einfach aus der Anschauung entnommen werden können. Er hat dann auch, noch tiefer dringend, die Struktur der Verknüpfung von Kernsätzen und allgemeinen Lehrsätzen untersucht. Darauf werden wir später zurückkommen.

Nun gehen wir dazu über, das Buch selbst zu betrachten. Zunächst werden die nicht metrischen Eigenschaften der Ebenenstücke, der Strecken und der Punkte auf diesen Gebilden auf eine Anzahl Kernsätze zurückgeführt. Bei der sorgfältigen Zergliederung der mathematischen Schlüsse entdeckt Pasch hier, woran bisher die Geometer von Euklid an blind vorübergegangen waren, die Kernsätze für die Anordnung der Punkte auf einer Strecke, der Punkte und Strecken eines Ebenenstückes. Jetzt konnten die einfachsten der projektiven Geometrie

angehörenden Lehrsätze für das beschränkte Raumstück rein logisch abgeleitet werden, zum ersten Male streng; d. h. die Voraussetzungen waren vollständig aufgedeckt, die bisher stillschweigend, unbewußt, intuitiv angenommen waren. Welch ein Weg von den alten Babyloniern vor 4000 Jahren, die den schönsten geometrischen Lehrsätzen als Beweis einfach das Wort „siehe“ hinzufügten, bis zu Pasch! Wie mußte sich die Sprache der Menschen, ja die ganze Denkart verändern, daß eine solche starre Struktuiierung des ursprünglichen Gemisches aus Anschauung und Deduktion möglich wurde.

Dann kommt die Einführung der idealen Elemente, wesentlich in der schon von Klein skizzierten Weise. Aber jetzt wird in langen mühsamen Deduktionen nachgewiesen, daß man auch für die neuen Elemente Verknüpfung und Anordnung so definieren kann, daß für die Gesamtheit der wirklichen und idealen Elemente die für den beschränkten Raumteil ausgesprochenen Kernsätze der Verknüpfung und Anordnung im erweiterten Sinne gelten. Nun kann ein Teil der projektiven Geometrie entwickelt werden. Hilbert hat im Jahre 1899 genau die Sätze angegeben, die auf dieser Stufe gefolgert werden können.

Hiernach kommt die zweite Schwierigkeit bei der Durchführung des Kleinschen Programms. Um den Punkt 3 zu erledigen, muß man zeigen, daß man von drei beliebigen Punkten einer Geraden ausgehend durch sukzessive Konstruktion vierter harmonischer Punkte in das Innere jeder Strecke hineinkommen kann. Das kann man auf Grund der bis jetzt ausgesprochenen Kernsätze nicht beweisen, wie Hilbert später (1899) gezeigt hat. Man braucht also einen weiteren Kernsatz. Pasch führt nun hier einen aus der Metrik stammenden Kernsatz ein, nämlich den, daß man durch fortgesetztes Verdoppeln eines Teiles AC einer Strecke AB über den Punkt B hinauskommt. Man kann das Verdoppeln von Strecken leicht mit der Konstruktion vierter harmonischer Punkte in Verbindung bringen und erhält so das gewünschte Resultat über die harmonischen Quadrupel, von dem man auf dem bereits vorgezeichneten Weg zur Begründung der projektiven Geometrie gelangt. Diese Begründung erhält ihren Abschluß durch die Darstellung der projektiven Transformationen in der gewöhnlichen Algebra. Der von Pasch eingeführte Kernsatz ist in der von Pasch gewählten Form identisch mit dem sogenannten Archimedischen Postulat,

das von Euklid und Archimedes bis zu den Mathematikern der Renaissance ziemlich viel benutzt, seitdem etwas in Vergessenheit geraten war. Pasch kannte es übrigens wohl auch nicht aus der Tradition und hat es erst in der zweiten Auflage seines Werkes mit dem jetzt üblichen Namen bezeichnet. Klein war nicht begeistert von diesem Hilfsmittel und wollte ihm ein mehr projektives substituieren. Aber das würde den Nachteil haben, daß es durchaus nicht auf die Anschauung gestützt werden kann.

Auch die übrigen metrischen Axiome (Kernsätze) wurden von Pasch eingeführt. Auf die Notwendigkeit, sie ausdrücklich zu formulieren, hatte schon Helmholtz aufmerksam gemacht. Auf Grund der Eigenschaften von Bewegungen als speziell charakterisierter projektiver Transformationen können dann auch die Bewegungen analytisch dargestellt werden. Damit ist wieder der vom Parallelenaxiom freie Aufbau der Geometrie erreicht. Im Vergleich zum Wege von Bolyai und Lobatschewskij ist der Weg, den Pasch in Verwirklichung der Ideen von Klein geht, durch Natürlichkeit und Klarheit der Grundidee ausgezeichnet und wird von keinem später gefundenen übertroffen. Die Benutzung des Archimedischen Axioms freilich läßt sich vermeiden, indem die projektive Geometrie allein mit Hilfe der Existenz der Gruppe der Bewegungen aufgebaut werden kann, wie zuerst Schur 1898 gezeigt hat. Seiner Ableitung liegt eine Idee von Hermann Wiener (1891) zugrunde.

Damit haben wir ein etwas stilisiertes Gesamtbild von dem Pasch'schen Buch erhalten. Nur noch eine charakteristische Einzelheit will ich hinzufügen. Pasch geht wie die Alten aus von dem Begriff der Strecke, aus der die Gerade durch Verlängerung gewonnen wird. Und in der Tat, die Gerade als Individuum ist keineswegs etwas primitiv Anschauliches, die unbegrenzt ausgedehnte Gerade, so wie wir sie heute meistens schon von Anfang an in die Geometrie einführen, ist kaum vor Desargues (17. Jahrh.) als Begriff geläufig. Pasch hatte bei dieser Einführung natürlich kein historisch-didaktisches Motiv. Es ist klar, daß die primäre Einführung der Strecke von Pasch als das Natürliche empfunden wurde. Aus Gründen der Sauberkeit und der logischen Einfachheit vermeidet er es, den Winkel einzuführen. Nebenbei bemerkt, das Historische interessierte ihn merkwürdig wenig,

das Mathematisch-Historische sicher gar nicht, das Allgemein-Historische, soweit mein Eindruck zuverlässig ist, sehr wenig. Es mag sein, daß ihm das allzu Subjektive bei der historischen Betrachtung unbehaglich war.

Das wichtigste Resultat des Buches ist die Sammlung von Kernsätzen. Das erste vollständige Axiomensystem war damit gefunden. Es ist höchst unwahrscheinlich, daß noch eine Lücke vorhanden ist, d. h. daß diese Sammlung von Kernsätzen nicht ausreicht, um die gewöhnliche Geometrie abzuleiten. Und das ist der Sinn von dem, was ich vorhin sagte: eine neue Epoche in der Kenntnis des Menschen von seinen eigenen Werken. Denn von der Struktur dieses seines eigensten Werkes, der Geometrie, hatte der Mensch bis dahin nur sehr verworrene Vorstellungen. Jetzt war ein festes und wohlgegliedertes Fundament aufgedeckt.

Was war die Wirkung dieses einzigartigen Buches? Zunächst jedenfalls war sie nicht groß. In den „Fortschritten der Mathematik“ wurde es kurz von Stolz besprochen. Hier findet sich kein Wort von dem bedeutenden Neuen, der Aufstellung eines vollständigen Axiomensystems für die Geometrie. Aber es wird doch bemerkt, daß bei Pasch „eine gerade Linie und eine Ebene nicht weiter erklärt oder definiert wird, sondern daß die Grundeigenschaften dieser Gebilde, wie sie etwa der Beobachtung entsprechen, in einer Reihe von Grundsätzen ausgesprochen werden“. Also der axiomatische Standpunkt, der in voller Schärfe dann von Hilbert in seinen „Grundlagen“ formuliert wird, ist erkannt. Aber schon daß Pasch gar nicht Grundeigenschaften der Geraden, sondern bloß der Strecke ausspricht, wird nicht bemerkt. Wahrscheinlich hat sich der Referent nicht die Mühe gemacht, das auf den ersten Blick nicht besonders ansprechende Buch durchzuarbeiten. Die Wirkung begann erst um 1890 sich zu zeigen. Es erschienen die ersten axiomatischen Lehrbücher der Geometrie in Italien, das von Peano 1889, das von Veronese 1891. 1890 wies Klein auf das Buch hin, 1893 hielt Hilbert eine Vorlesung in Königsberg über die Grundlagen der Geometrie, für die er auch das Buch von Pasch benutzt haben wird. Dies war wohl die erste unter diesem Titel gehaltene Vorlesung in Deutschland. 1891 hielt H. Wiener einen Vortrag in Halle, der große Wirkung hatte. Hier wird scharf der axiomatische Standpunkt betont,

freilich, wenigstens im Referat, der Name Pasch nicht genannt. Im gleichen Jahr schrieb F. Schur in den Annalen über eine Modifikation in der Einführung der idealen Elemente. 1899 erschienen die Grundlagen der Geometrie von Hilbert. Sie stellten die axiomatische Methode mit solchem Glanze dar, daß sie ihr nicht nur in der Betrachtung der Geometrie zum Siege verhalfen, sondern weit über die Geometrie hinaus die Betrachtungen in den Naturwissenschaften, ja die Erkenntnistheorie selbst aufs stärkste beeinflussten. Schon Wiener hatte das Strukturproblem erweitert, indem er die Abhängigkeit der Sätze der projektiven Geometrie von einzelnen Sätzen (nicht Kernsätzen) als Problem aufwarf. Hilbert aber vertiefte das Strukturproblem außerordentlich, indem er die Unabhängigkeit einzelner Sätze von anderen Sätzen oder Satzsammlungen mit größtem Erfolg untersuchte. Sicher ist gerade durch diese glänzenden und abschließenden Resultate der Sieg der Axiomatik vollendet worden.

Kürzer können wir unsere Betrachtungen über das ebenfalls 1882 erschienene Werk „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung“ fassen. Das Ziel ist viel bescheidener. Das schon in anderen Lehrbüchern, z. B. in dem von Lipschitz, ferner in Schriften von Dedekind und den Vorlesungen von Weierstraß über die Grundlagen der Analysis Entwickelte wird zusammengebracht und äußerst sorgfältig, auch für das Verständnis von Anfängern passend, dargestellt. Als Mangel dieses Buches hat Pasch empfunden, daß in ihm die Lehre von den natürlichen Zahlen vorausgesetzt wird. Diese Lücke wird erst viele Jahre später ausgefüllt in den „Grundlagen der Analysis“ (1905), über die wir jetzt ganz kurz sprechen werden. Sein Bestreben, in dem unter Mitwirkung von Cl. Thaer herausgegebenen Buche war, die Arithmetik zunächst bis zur Darstellung der Zahlen im dekadischen System aufzubauen, dann die Irrationalzahlen einzuführen und bis zu den allgemeinen Potenzen und Logarithmen aufzusteigen. Uns interessiert als besonders originell der Aufbau der Lehre von den natürlichen Zahlen, der am ausführlichsten in seinem letzten 1930 herausgegebenen Werk „der Ursprung des Zahlbegriffs“ dargestellt wird. Vier Begriffe sind es, die Pasch zugrunde legt: Dinge, Namen von Dingen, Angaben von Dingen durch ihren Namen, früher und später in Bezug auf die Angaben. Wir können nicht

erwarten, daß die Einführung genau der psychologischen Entstehung des Begriffs von den Zahlen und ihrer Aufeinanderfolge entspricht, aber sie ist doch als natürlich zu bezeichnen. Ob sie freilich den Aufbau genügend struktuiert, ist zweifelhaft.

In einer Reihe von sehr spät (nach 1920) entstandenen Aufsätzen für die Annalen der Philosophie und philosophischen Kritik — später gesammelt unter dem Titel „Mathematik am Ursprung“ — beschäftigt sich Pasch mit der Frage, wie man zu den Kernsätzen auf natürliche Weise kommen kann. Denn die Kernsätze sind gewiß Resultate der Abstraktion aus einer langen Kette von Erfahrungen. Pasch unternimmt nun hier nicht, die tatsächlichen Erfahrungen, die etwa zu dem Begriff der Strecke geführt haben, zu untersuchen. Das wäre eine Art anthropologischer Untersuchung. Sondern er führt den Leser durch eine Kette von möglichen Experimenten zu diesem Begriff. So werden die Begriffe des starren Körpers, der stellenweise „dünnen“, also zweidimensionalen, der eindimensionalen Körper und ähnliches mehr in eingehender geduldiger Zergliederung dargestellt.

In verschiedenen Arbeiten (s. z. B. Math. am Ursprung VII) untersucht Pasch die Struktur des mathematischen Beweises. Durch sorgfältige Betrachtung gelingt es ihm, uralte Schlußfiguren noch weiter zu zergliedern, wie z. B. den Schluß mit Hilfe der Transitivität der Eigenschaft des Enthaltenseins (modus barbara). Es gelingt ihm, die Voraussetzung der Transitivität auf andere, vielleicht einfachere Voraussetzungen zurückzuführen. Diese Arbeit wurde von Pasch selbst nur als Vorarbeit empfunden. Sie liefert einen wertvollen Beitrag zu den augenblicklich sehr intensiv betriebenen Untersuchungen auf dem Gebiet der Logik. Jedenfalls ist die Pasch'sche Analyse eine erstaunliche Leistung des Scharfsinns bei einem 80jährigen Mann.

Zum Schluß wollen wir noch versuchen, uns ein Gesamtbild von Pasch vor Augen zu führen. Die äußere Erscheinung ist ja weitaus den meisten unter Ihnen gegenwärtig und unvergeßlich; wie er einem an der Tür seines Arbeitszimmers entgegenkam, die beiden Hände zur Begrüßung vorgestreckt, die nicht kleine Gestalt vom Alter leicht gebeugt, das gesundfarbene Gesicht mit dem kurz gehaltenen weißen Bart, die scharfe Brille vor den immer mehr versagenden Augen, der kräftige Bau

des Schädels, der Ausdruck gütig, weise, ein wenig ironisch, gar nicht weich, sondern eher diszipliniert. Eine fast pedantische Ordnung in allen seinen Sachen, so daß er jede gewünschte Kleinigkeit trotz seiner schlechten Augen sofort finden konnte. Mit einer spartanischen Anspruchslosigkeit hat er sich in den schlimmen Jahren nach dem Kriege eingerichtet. Wir haben ihn bewundert, wie er es durch systematisch durchdachte Anordnung fertig brachte, als über 80jähriger mit einem Rucksack als Gepäck ganz allein, über die Umsteigestation Berlin, nach Greifswald zu seinen Kindern zu fahren. Wir haben gedacht, daß er es verstand, die allein absolut sichere Methode der Axiomatik auch auf die Dinge des täglichen Lebens zu übertragen. Und als Mathematiker: man macht sich die Beschreibung leichter durch Vergleich. Aber keiner unter den Mathematikern der neueren Zeit will mir zum Vergleiche passend erscheinen. Am ehesten möchte ich ihn mit Euklid vergleichen. Euklid's große, unvergängliche Leistung ist sicher die Systematik gewesen. Vielleicht hat Euklid keine ganz wichtige mathematische Erscheinung als erster erkannt. Aber seine geordnete Darstellung der Mathematik hatte zeugende Wirkung. Archimedes und Apollonios sind ohne Euklid nicht zu denken. Ja, es gibt wenig Menschen, deren Formungen solchen Einfluß auf die Gedankenketten der Nachwelt gehabt haben, wie die Euklid's. Und so wirkt auch Pasch's Werk weiter, wenn es auch natürlich an geschichtlicher Bedeutung mit den „Elementen“ nicht wetteifern kann. Aber es ist aus der Geschichte der modernen Mathematik nicht fortzudenken, weil es ebenfalls fruchtbar weiter gewirkt hat.

Als formenden Menschen, als Mathematiker, der stets den größten Wert auf den sprachlichen Ausdruck als den Träger der Gedankenketten gelegt hat, können und sollen wir ihn auch mit Dichtern vergleichen. Und da möchte ich ihn mit dem Manne voll leidenschaftlicher Sittlichkeit, und doch größter Güte, dem großen Formkünstler, der mit fast pedantischer Genauigkeit jede Einzelheit bedachte, mit dem Deutsch-Österreicher Adalbert Stifter vergleichen. Ich weiß gar nicht, ob Pasch Stifter gekannt oder gar viel gelesen hat, aber manchmal überrascht mich die Ähnlichkeit seiner Sprache mit der des Dichters. Das kommt vielleicht besonders in seiner schönen Festrede von 1894 „Über den Bildungswert der Mathematik“

zum Vorschein, wo er übrigens auch begeistert von Euklid als Vorbild spricht. Diese Rede sollte jeder nicht mathematisch Interessierte lesen, der sich ein Bild von Pasch's Eigenart machen möchte. Pasch und Stifter haben zweifellos eine innere Verwandtschaft, obwohl ihre Herkunft denkbar verschieden ist. So wie Stifter hatte Pasch eine behutsame gütige Art, mit den Dingen umzugehen. Pasch übte keine gewaltsame Oktroyierung von Symbolgeflechten auf die Wirklichkeit aus, aber doch versuchte er mit unbeirrbarer Kraft, Ordnung in die Beziehungen der Außenwelt zu dem Bau der Mathematik zu bringen. In der Geschichte der menschlichen Erkenntnisse hat sein Name eine besondere Bedeutung. Pasch wird stets ein Vorbild sein. Ob man diesem entsprechend handeln möchte, das ist vielleicht Sache des Temperaments, aber als Vorbild werden wir ihn stets empfinden, und sein Wirken wird nicht aufhören.

Max Dehn.

Moritz Pasch zum achtzigsten Geburtstag am 8. November 1923.

„Zwei Punkte“, heißt's, „bestimmen eine Strecke“.
Darf ich an seinem Ehrentag es wagen,
Der Axiomatik Klassiker zu sagen,
Was ich für ihn in diesem Satz entdecke?

Der Weg, den Du rückschauend heut betrachtest
Bis hin zu Deiner Jugend schweren Zeiten,
Er folgt auch ewigen Notwendigkeiten
Wie die, zu deren Deuter Du Dich machtest.

Denn, wo ein anderer sich krümmend windet
Im Dickicht der verschlungenen Lebenspfade,
Du zeichnest Deinen unverrückbar grade:
Die Linie, die Geist und Herz verbindet.

Denken und Wollen ist Dir eine Einheit,
Nur höchste Klarheit durfte Dir genügen.
Es hielt Dich über allen Lebenslügen
Des Geistes Schärfe und des Herzens Reinheit.

Wer kann an seinem Abend mehr verlangen,
Als daß sich seines Tages Werk ihm male
Vom ersten Dämmern, wo es angefangen,
In einem einz'gen ungebrochenen Strahle?

Wir ändern, die in Wirrnis und Getöse
Auf Deinem Weg zu wandeln nicht vermochten,
Mit andern Waffen als mit Deinen fochten,
Wir beugen uns vor Deiner stillen Größe.

Georg Honigmann.