

# Die Naturwissenschaften

Wochenschrift für die Fortschritte der Naturwissenschaft, der Medizin und der Technik

Begründet von Dr. A. Berliner und Dr. C. Thesing.

Herausgegeben von

**Dr. Arnold Berliner** und **Prof. Dr. August Pütter**

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9.

Heft 17.

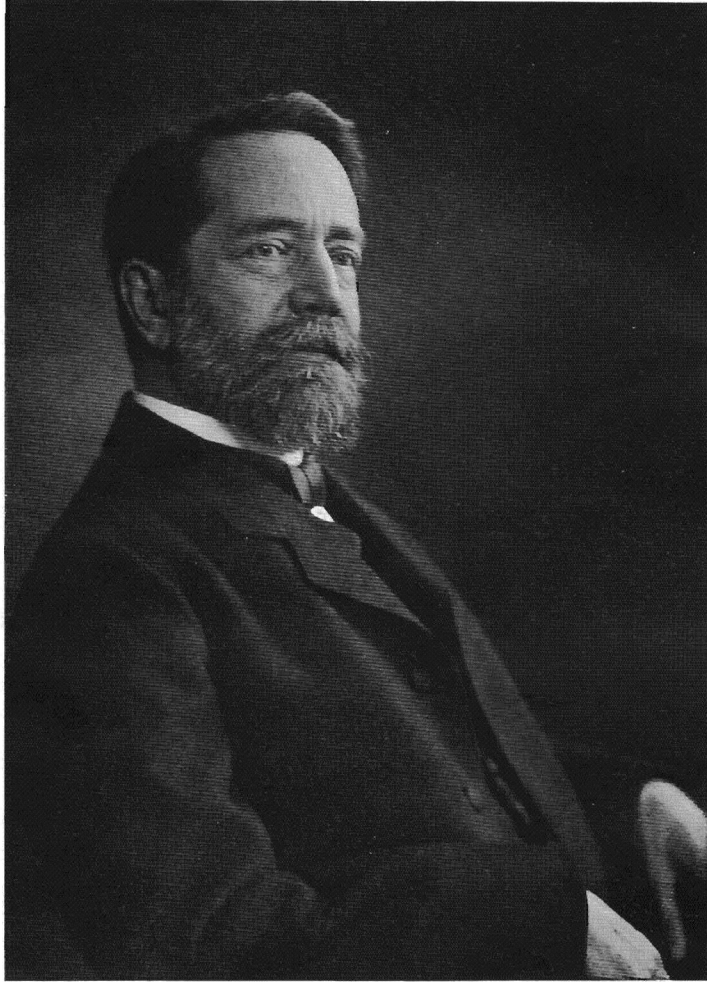
25. April 1919.

Siebenter Jahrgang.

# FELIX KLEIN

ZUR FEIER SEINES

SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGES



*J. Klein*

## Inhalt:

	Seite
Felix Klein zum 25. April 1919, seinem siebenzigsten Geburtstage. Von <i>Geh. Hofrat Prof. Dr. Robert Fricke, Braunschweig</i> . . . . .	275
Felix Klein als junger Doktor. Von <i>Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Voß, München</i> . . . . .	280
Klein und die Mathematik der letzten fünfzig Jahre. Von <i>Prof. Dr. Wilh. Wirtinger, Wien</i> . . . . .	287
Klein und die nichteuklidische Geometrie. Von <i>Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Schoenflies, Frankfurt a. M.</i> . . . . .	288
Die Bedeutung des Erlanger Programms. Von <i>Prof. Dr. C. Carathéodory, Berlin</i> . . . . .	297
Klein, Riemann und die mathematische Physik. Von <i>Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Sommerfeld, München</i> . . . . .	300
Felix Klein und die Reform des mathematischen Unterrichts. Von <i>Prof. Dr. H. E. Timerding, Braunschweig</i> . . . . .	303
Felix Klein und die Förderung der angewandten Wissenschaften. Von <i>Prof. Dr. L. Prandtl, Göttingen</i> . . . . .	307
Liste der Veröffentlichungen:	
A. Selbständig erschienene Veröffentlichungen, redigierte Sammelwerke, sowie Einführungsworte zu Werken anderer . . . . .	311
B. Autographierte Vorlesungshefte . . . . .	312
C. Die bei Felix Klein bearbeiteten Dissertationen . . . . .	312
D. Abhandlungen . . . . .	313

## Felix Klein zum 25. April 1919, seinem siebzigsten Geburtstage.

Von Geh. Hofrat Prof. Dr. R. Fricke, Braunschweig.

In seiner Familiengeschichte schreibt Herr Justizrat A. Klein, Bruder von Felix Klein: „Mein Vater war ein kerniger Westfale, ein organisatorisches Talent, fleißig und streng gegen sich selbst. Meine Mutter stellte die Güte und Milde im Hause dar, sie besaß ausgeprägte pädagogische und spekulativ-wissenschaftliche Interessen.“ Da bewahrt sich Zarathustras Spruch: „Ehe, so heiße ich den Willen zu Zweien, das Eine zu schaffen, das mehr ist, als die es schufen.“ Vom Vater erbte Felix Klein sein großes organisatorisches Talent, seinen Fleiß, seinen unermüdlichen Schaffensdrang; der Mutter dankt er seine unvergleichlichen pädagogischen Gaben, seine spekulativ-wissenschaftlichen Interessen und nicht zum letzten die Güte seines Herzens.

Die vorliegenden Zeilen können und wollen nicht den weiter folgenden Einzelaufsätzen vorgehen, in denen die reichen Ergebnisse von Felix Kleins Lebensarbeit nach ihren verschiedenen Richtungen hin ausführlicher gewürdigt werden. Indem diese einleitenden Zeilen sich nur bestreben, ein kürzeres Gesamtbild der Persönlichkeit Kleins zu entwerfen, mögen sie ein Triptychon zeichnen, dessen Mittelstück füglich der Forscher Klein einnehmen mag, dessen Flügelbilder aber dem Lehrer und dem Organisator gewidmet sein mögen.

Will man die Schöpfungen Kleins im Gebiete der forschenden Mathematik voll würdigen, so muß man sich in die Zeiten ihrer Entstehung zurückversetzen. Wenn auch schon langsam die Saat ausgestreut wurde, die dann während der letzten Jahrzehnte eine starke Wandlung namentlich der Funktionentheorie im Sinne der Cantorschen Lehre zur Folge hatte, so waren es doch in der Jugendzeit Felix Kleins andere Probleme und vor allem andere Methoden, die das Interesse der Mathematiker vornehmlich in Anspruch nahmen. Riemann war aus reicher und noch mitten im Flusse befindlicher Entwicklung früh verstorben. Nur erst im Gebiete der Funktionentheorie waren seine Grundauffassungen von ihm selbst schon etwas weitergehend entwickelt. Aber auch so war nur ein erster Schritt getan, um eine neue Periode funktionentheoretischer Forschung einzuleiten. Wenn auch viele an der Fortbildung der reichen Ideenwelt Riemanns arbeiteten, so wurde doch Felix Klein der eigentliche Vollender Riemanns in seinem Hauptgebiete, der Funktionentheorie. Klein teilt mit Riemann die lebendige geometrische Anschauung, vor allem auch die physikalischen Interessen und

die Fähigkeit, physikalische Probleme und Methoden nutzbringend für mathematische Zwecke zu verwerten. Klein wurde, nachdem er im Herbst 1865 sechzehnjährig vom Gymnasium seiner Vaterstadt Düsseldorf zur Bonner Universität gekommen war, bereits zu Ostern 1866 Assistent für Physik bei Plücker und hatte dabei zugleich den Vorteil, in Plückers geometrische Forschungen frühzeitig die beste Einführung zu gewinnen. Bei seiner mit Riemanns Eigenart so nahe verwandten Doppelseite ist es denn verständlich, daß späterhin, als Klein den Schöpfungen Riemanns näher trat, jene glänzende Reihe von Untersuchungen aus der zweiten Hälfte der siebziger Jahre und den ersten achtziger Jahren ausgelöst wurde, die in der Arbeit „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie“ gipfelte. Es ist gewiß kein schlechter Titel, „Schüler Riemanns“ zu heißen, und bis zu einem gewissen Grade ist schließlich jeder ein Schüler seiner Zeit. Aber gleichwohl ist hervorzuheben, daß die Riemannsche Tradition in Kleins Hand zu einer neuen und wirkungsvollen Disziplin wurde, die lange Zeit einen Mittelpunkt des mathematischen Interesses abgab. Insbesondere ist der Begriff der „automorphen Funktion“, abgesehen von dem gleichberechtigten Anteil, der einem fremdländischen Mathematiker zukommt, durchaus Kleins selbständiges Werk.

Fügt sich Klein, was die Gegenstände seiner Forschungen übrigens auch in seiner ersten, rein geometrischen Periode angeht, dem allgemeinen Stande der Mathematik in den sechziger und siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts ein, so ist er doch ein ganz Neuer in der Methode der Forschung, die seiner Eigenart entspricht. Diese Methode beruht auf der genialen Fähigkeit Kleins, die inneren Zusammenhänge zwischen den verschiedenen mathematischen Disziplinen zu erkennen und für die Zwecke der weitergehenden Forschung fruchtbar zu gestalten. Es ist wohl namentlich von seiten der Arithmetiker vielfach der Grundsatz verfochten, die Methode solle sich in ihrer Art allemal genau dem Gegenstande anpassen, und es sei noch ein Zeichen der Unreife, wenn die Entwicklung mit Überlegungen arbeite, die ihrer Art nach dem Gegenstande fremd seien. Dies trifft gewiß in manchen Fällen zu. So hat z. B. die Idealtheorie Dedekinds in rein arithmetischem Gewande, das ihr Schöpfer allein gelten ließ, gewiß ihre reifste Gestalt. Aber es wäre verfehlt, den fraglichen Grundsatz zu einer allgemein verbindlichen Norm mathematischer Forschung zu machen. Gerade Kleins beste Arbeiten über elliptische Modulfunktionen

wirken hier überzeugend. Ich glaube, daß die meisten Mathematiker, die *Kleins* Arbeiten über die Transformation siebenten Grades der elliptischen Funktionen gelesen haben, von der Schönheit dieser Entwicklungen ergriffen worden sind. Es hat ja freilich auch Kritiker gegeben, die ihr Urteil in die Aussage zusammenfaßten: „Die Resolvente siebenten Grades hatte auch schon *Hermite*.“ Aber *Hermite* hat nicht die Kurve vierten Grades mit 168 Kollineationen in sich, die *Kleins* eigene Entdeckung war. Er hat vor allem nicht das wunderbare Zusammenspiel der Arithmetik der Modulgruppe mit der geometrischen Invariantentheorie im ternären Gebiete, mit der genialen Handhabung der Riemannschen Flächen zur Gewinnung der Resolventen. Fast mühelos kamen da die Ergebnisse zustande, die früher nur durch umständliche Rechnungen gewonnen werden konnten. Jeder Zweifel an der überragenden Kraft dieser Methode mußte verstummen, als *Klein* bald nachher seine endgültigen Resultate über die Transformation elften Grades vorlegte. Damit vergleiche man die inmitten gescheiterten Versuche *Hermites*, die Resolvente elften Grades zu gewinnen.

Ein besonders schönes Beispiel für *Kleins* Forschungsmethode liefert auch die geradlinige projektiv-geometrische Gestalt des den Modulfunktionen zugrunde liegenden Dreiecksnetzes. In dieser Figur stellte *Klein* eine innige Beziehung zwischen der projektiven Geometrie und der arithmetischen Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen her, Gegenstände, welche zwei Disziplinen angehören, die man als zwei Gegenpole der Mathematik ansehen möchte. Interessant ist auch, daß *Klein*, als er im Winter 1869/70 durch *Stolz* zuerst von der nichteuklidischen Geometrie hörte, sofort deren Beziehung zur Cayleyschen Maßgeometrie erkannte. Dieser Erkenntnis danken wir jene beiden bahnbrechenden Arbeiten *Kleins* über nichteuklidische Geometrie aus dem Anfange der siebziger Jahre. Auch die bekannte Programmschrift „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“, mit der *Klein* seine Erlanger Professur antrat, steht ganz auf dem Boden seiner Methode, insofern hier die verschiedenen Richtungen geometrischer Forschungen auf Grund eines einheitlichen gruppentheoretischen Prinzips miteinander in Beziehung gesetzt werden.

Mit Recht sieht man als die höchste Höhe, zu der *Klein* in seiner funktionentheoretischen Periode gelangt ist, die Entdeckung jener Sätze an, die er selbst „Fundamentaltheoreme“ nannte, und die heute „Uniformisierungssätze“ heißen. Man kennt die überraschende Entwicklung, welche die Theorie der elliptischen Funktionen durch *Abel* und *Jacobi* genommen hat. *Legendre* betrachtete die elliptischen Integrale in ihrer Abhängigkeit von der Integrationsvariablen. Indem *Abel* und *Jacobi* alle Größen des hier vorliegenden Systems zusammenhängender Variablen in ihrer Abhän-

gigkeit vom Integral erster Gattung untersuchten, gelangten sie zu „eindeutigen“ Funktionen; sie hatten die „uniformisierende“ Variable für das System dieser Funktionen erkannt. Im Sinne der Riemannschen Theorie bezieht sich diese Entdeckung auf die algebraischen Gebilde des Geschlechtes 1. *Klein* ist der Entdecker der verschiedenen Gattungen uniformisierender Variablen für algebraische Gebilde eines beliebigen Geschlechtes geworden; dies ist eine der größten Leistungen, die mit seinem Namen verbunden bleiben wird. Es mußte allerdings erst noch ein Vierteljahrhundert hingehen, bis alle von *Klein* aufgestellten Theoreme einwurfsfreie Beweise fanden. Die Beweismethoden aus dem Anfange der achtziger Jahre des vorigen Jahrhunderts waren noch unzureichend. Erst von 1907 ab gelang es *P. Koebe*, die Kleinschen Theoreme nach und nach alle streng zu beweisen.

Es sind hiermit übrigens nur erst die wichtigsten Gebiete der Forschungen *Kleins* namhaft gemacht. Wie man aus der unten folgenden Liste der Veröffentlichungen *Kleins* entnehmen wollte, ging der funktionentheoretischen Periode eine durch vielseitige Erfolge gekrönte Zeit geometrischer Forschungen voraus. Hieran schlossen sich die algebraischen Arbeiten über die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades in dem geometrischen Gewande der Ikosaedertheorie. Andererseits setzen mit dem Ende der achtziger Jahre die Untersuchungen über hyperelliptische und Abelsche Funktionen ein. Weiter tritt in den neunziger Jahren das Interesse für die Anwendungen deutlicher hervor; wir verdanken dieser Periode insbesondere das bekannte Werk von *Klein* und *Sommerfeld* über den Kreisel. Inzwischen war die Zeit gekommen, wo durch die ausgedehnte organisatorische Tätigkeit *Kleins* die mathematische Produktion mehr und mehr in den Hintergrund gedrängt wurde. Daß aber die Kraft der Produktion noch keineswegs erschöpft war, hat in den allerletzten Jahren das erfolgreiche Eingreifen *Kleins* in die Entwicklungen von *Einstein* und *Hilbert* über die Grundlagen der Physik und insbesondere über die Gravitationstheorie gezeigt.

Die akademische Lehrtätigkeit *Kleins* begann im Anfang des Jahres 1871 mit seiner Habilitation in Göttingen. Hierher war *Klein* bereits 1869 gekommen, als ihm nach *Plückers* Tode (1868) die Aufgabe erwuchs, den liniengeometrischen Nachlaß *Plückers* herauszugeben, und er dieserhalb die Beziehung zu *Olebsch* in Göttingen anknüpfte. Übrigens ist bemerkenswert, daß *Klein* während seiner Göttinger Dozentur vornehmlich physikalische Vorlesungen gehalten hat. Erst durch die schnelle Entwicklung seiner amtlichen Laufbahn wurde er endgültig für die Mathematik gewonnen. Sehr wesentlich für die Weiterentwicklung wurde in Göttingen die enge wissenschaftliche Beziehung, die sich zwischen

*Klein* und *Clebsch* sowie dessen Schülern entspann. Auch die Beziehung zu *Lie*, die bereits früher angeknüpft war, blieb von nachhaltiger Einwirkung.

Nach kurzer Dozentenzeit wurde *Klein*, damals 24-jährig, im Herbst 1872 als ordentlicher Professor nach Erlangen berufen, wo er eine äußerst geringe Studentenzahl und sehr unentwickelte Verhältnisse antraf. Aber das Bild sollte alsbald ein ganz anderes werden. Im November 1872 starb *Clebsch* ganz unerwartet auf der Höhe seiner Wirksamkeit. In ihm verlor *Klein* seine damals wichtigste wissenschaftliche Beziehung, aber zugleich erwuchsen ihm aus diesem Verluste die größten Aufgaben. Sein Ruf als Geometer und als akademischer Lehrer war bereits so fest gegründet, daß ihm alsbald der Schülerkreis von *Clebsch* nach Erlangen folgte und in ihm einen neuen Mittelpunkt fand.

Aber auch diese Tätigkeit sollte nur wenige Jahre dauern. Bereits zu Ostern 1875 wurde *Klein* an die technische Hochschule nach München berufen, wo er zusammen mit *Brill* die Nachfolge *Hesses* zu übernehmen hatte. Es erwuchs hier die Doppelaufgabe, neben den erforderlichen Vorlesungen für die Studierenden der technischen Wissenschaften solche für Schulamtskandidaten zu halten, die, dem Münchener Brauche entsprechend, gleichfalls an der Hochschule studierten. *Klein* und *Brill* wurden dieser Aufgabe durch Neueinrichtung des Lehrplanes gerecht. Sie richteten zunächst für die Ingenieure eine über vier Semester reichende Vorlesung über „Höhere Mathematik“ mit zugehörigen Übungen ein, die sie jedes Jahr wechselnd begannen. Daneben traten besondere Vorlesungen für Schulamtskandidaten. In letzterem Kreise fand *Klein* wieder eine größere Anzahl von Spezialschülern. Es war die Zeit, wo neben die Geometrie und Algebra nun die Funktionentheorie als *Kleins* Forschungsgebiet trat. Die Periode der elliptischen Modulfunktionen begann und entwickelte in dem ganzen um *Klein* gescharten Schülerkreise eine lebhafteste und erfolgreiche Forschertätigkeit.

Herbst 1880 ging *Klein* als Professor an die Universität Leipzig über, und zwar mit einem ausdrücklichen Lehrauftrage für Geometrie. Dieses Gebiet sollte für die Ausbildung der Schulamtskandidaten mehr zur Geltung gebracht werden. *Klein* richtete einen viersemestrigen Vorlesungskurs über Geometrie ein, setzte daneben aber seine funktionentheoretischen Spezialvorlesungen fort. Die Zahl seiner Spezialschüler wuchs beständig. Neben den Deutschen fanden auch begabte Ausländer den Weg zu ihm; sein Seminar war eine Stätte lebhaftester Arbeit, die weitere Ausbildung der Theorie der elliptischen Modulfunktionen gab den Hauptmittelpunkt ab, *Klein* selbst war auf der Höhe seiner Untersuchungen über automorphe Funktionen angelangt.

Als *Klein* zu Ostern 1886 seine Stellung in Leipzig mit der an der Universität Göttingen tauschte, waren wohl in erster Linie Gesundheitsrücksichten maßgeblich. Daneben kam aber die Sehnsucht nach jenem Orte hinzu, wo *Klein* die ersten frohen Jahre seiner akademischen Lehrtätigkeit durchlebt hatte, wo er in lebhaftem wissenschaftlichen Austausch mit *Clebsch* und seinen Schülern das Glück des Gebens und Empfangens in vollen Zügen kennen gelernt hatte. Seiner geliebten Universität Göttingen ist *Klein* dann trotz mehrfacher glänzender Berufungen über die Jahrzehnte treu geblieben. Von hier ist jene umfassende Wirksamkeit ausgegangen, die seinen Namen in dem großen Kreise der preußischen Oberlehrer so hochgeachtet und beliebt gemacht hat.

Wenn man nun nach den Mitteln fragt, mit denen *Klein* seine akademische Lehrtätigkeit zu einer fortlaufenden Kette von Siegen machen konnte, so ist es in erster Linie die fesselnde Kraft seines Vortrags. Eine genaue Disposition der Vorlesung im ganzen sicherte die erschöpfende Behandlung des Gegenstandes. Der Vortrag der einzelnen Stunde ist ohne jedes rednerische Beiwerk von einer Sicherheit, Klarheit und Schönheit, die vielleicht mancher bei mathematischen Lehrgegenständen nicht für möglich halten möchte. Dabei hat *Klein* sich in den Themen seiner Vorlesungen nur sehr selten wiederholt. Wenn er aber zu einem schon einmal behandelten Gegenstande zurückkehrte, so geschah dies meist unter ganz neuen Gesichtspunkten. Ein glücklicher Umstand ist, daß *Klein* von seinen Vorlesungen stets Ausarbeitungen anfertigen ließ, die zum Teil autographisch vervielfältigt sind und auf diese Weise weiteren Kreisen zugänglich wurden. Neben die Vorlesungstätigkeit tritt die Ausbildung der Spezialschüler in den Seminaren und den Einzelbesprechungen. Hierin hat, was die Anregung zur wissenschaftlichen Produktion angeht, von Anfang an der Schwerpunkt von *Kleins* Lehrtätigkeit gelegen. Die Gegenstände haben sich gewöhnlich an *Kleins* eigene Arbeiten angeschlossen, die ihn gerade zurzeit beschäftigten. In der späteren Göttinger Zeit, seit *Klein* die Redaktion des vierten Bandes der Enzyklopädie übernommen hatte, kamen namentlich die Einzelgebiete der Mechanik zur Geltung. Von dem Reichtume und der Vielseitigkeit seiner Ideen und Problemstellungen spendete *Klein* seinen Spezialschülern stets mit vollen Händen. Auch mit den Freunden und gleichstrebenden Forschern steht *Klein* von jeher in persönlichem Austausch der Ideen. Wenn z. B. *Dedekind*, der Niedersachse, nie in seinem Leben eine Vorlesung über sein Lebenswerk, die Idealtheorie, gehalten hat, wenn er in die Tiefen seiner Diskriminantenarbeit durch das „gesprochene“ Wort wohl kaum jemanden eingeführt hat, so offenbart sich uns *Klein* durchaus als Rheinländer. Sein Element ist der persönliche Ideenaustausch durch

das Wort, sein Lebensbedürfnis ist der Unterricht und die Freude an dessen Gelingen.

Die ersten Organisationsbestrebungen Kleins bezogen sich auf die Entwicklung des mathematischen Universitätsunterrichtes. Hier waren ihm die technischen Hochschulen, speziell diejenige in Darmstadt mit ihren Einrichtungen für darstellende Geometrie, und das Berliner Gewerbeinstitut mit seinen Bibliothekseinrichtungen anregend. Überhaupt wirkte die straffere Organisation des Unterrichts an den technischen Hochschulen vorbildlich. Anfang Dezember 1872 hielt Klein in Erlangen eine Antrittsrede, in der er ein umfangreiches Programm für seine Lehrtätigkeit entwickelte. Die Vorlesungen sollten sich in regelmäßige Elementarvorlesungen und Spezialvorlesungen, die zu selbständigen Arbeiten anleiten sollten, spalten. Zu den Elementarvorlesungen rechnete Klein schon damals die darstellende Geometrie, die zugleich mit Übungen im Zeichnen ausgestattet werden sollte. Neben die Spezialvorlesungen tritt entsprechend die seminaristische Ausbildung. Von der Forderung, daß die Lehramtskandidaten durch die Spezialvorlesungen bis zur Selbständigkeit in der Ausführung eigener Untersuchungen geführt werden sollten, ist Klein übrigens späterhin zurückgekommen.

Der angewandten Mathematik trat Klein während seiner Professur an der Münchener technischen Hochschule noch nicht so nahe, als man nach seiner späteren Göttinger Tätigkeit in dieser Richtung vielleicht erwarten sollte. Er richtete sein Augenmerk nur erst auf die darstellende Geometrie, die graphische Statik und die Kinetik, die er auch für den Unterricht der Lehramtskandidaten heranzog.

In den Grenzen der Erlanger und Münchener Pläne halten sich auch die Lehrpläne und Neueinrichtungen, die Klein als Professor der Geometrie an der Universität Leipzig schuf. Dank dem Entgegenkommen der sächsischen Unterrichtsverwaltung konnte Klein hier die Einrichtungen ganz seinen Ideen entsprechend verwirklichen. Es wurden ausreichende und geeignete Räume zur Verfügung gestellt, in denen Modell-sammlungen und Zeichensäle für darstellende Geometrie Platz fanden. Für den Seminarbetrieb wurde durch Anlage einer größeren Handbibliothek, sowie durch Einrichtung von Lese- und Arbeitszimmern gesorgt. Späterhin wurde sogar ein besonderes Institut für das Seminar eingerichtet.

In den ersten Göttinger Jahren halten sich die organisatorischen Bestrebungen Kleins in denselben Grenzen wie in Leipzig. Eine neue Wendung aber trat mit dem Jahre 1892 ein; etwa seit diesem Jahre datiert die große Entwicklung, welche die Göttinger Universität unter Kleins Führung in den Lehrinrichtungen und Lehrplänen für Mathematik und Physik gefunden hat.

Es war als ein besonderes Glück anzusehen, daß Klein in dem Ministerialdirektor F. Althoff einen Mann fand, der nicht nur vollstes Verständnis für seine organisatorischen Ideen hatte, sondern der zugleich als ein Verwaltungsbeamter allerersten Ranges die Kraft der Durchführung besaß, ja der selbst immer wieder vorwärts trieb.

Wenn übrigens nun weiterhin die glänzende Entwicklung vornehmlich der angewandten Mathematik in Göttingen auf Kleins Initiative zurückgeführt wird, so darf nicht übersehen werden, daß Klein wie bisher auch für die reine Mathematik in Göttingen in wirksamster Weise Sorge trug. Um in dieser Hinsicht nur auf eines aufmerksam zu machen, so sei bemerkt, daß die Gewinnung Hilberts für Göttingen mit allen ihren wichtigen Folgen dem energischen Eintreten Kleins für Hilbert zu danken ist.

Die organisatorische Tätigkeit Kleins erstreckte sich nun insbesondere nach zwei Richtungen hin; sie betraf einmal die Ausgestaltung der Göttinger Universitätseinrichtungen für angewandte Mathematik, sodann die Organisation des mathematischen Unterrichtes in seinem gesamten Umfange. Aber es sind dies nur die Hauptzweige seiner leitenden und organisatorischen Tätigkeit. Klein ist in seiner zweiten Göttinger Periode von einer geradezu staunenswerten Vielseitigkeit und Leistungsfähigkeit. Die Neuorganisation der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften Anfang der neunziger Jahre entsprach seinen Ideen; er war wesentlich beteiligt am Zustandekommen des Kartells der deutschen Akademien und der entsprechenden weiteren internationalen Vereinigung. Klein ist von jeher die eigentliche Seele des großen Unternehmens der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, er nahm nach Scherings Tode die Herausgabe des Gaußschen Nachlasses in seine erfahrene Hand. Auch hatte er schon seit 1902 an der Disposition des großen, von Hinneberg redigierten Monumentalwerkes „Kultur der Gegenwart“ mitgearbeitet und hat später (1908) zusammen mit W. v. Dyck die Initiative ergriffen, daß die mathematisch-naturwissenschaftlichen sowie die technischen Disziplinen neben den historisch-philologischen in diesem Werke volle Berücksichtigung fanden. Eine längere Reihe von Jahren hindurch vertrat Klein überdies die Göttinger Universität im Preußischen Herrenhause. Und das alles ging einher neben seiner engeren amtlichen Tätigkeit und der Redaktion der mathematischen Annalen, in die Klein seit Clebsch' Tode eingetreten war.

Die Wirksamkeit Kleins für die Neuorganisation des mathematischen Unterrichtes machte sich zunächst an der Universität Göttingen selbst geltend. Der jeweilige Vorlesungsplan wurde fortan in einer gemeinsamen Sitzung der mathematischen, physikalischen und astronomischen Professoren und Dozenten besprochen. Für die Studierenden wurden Ratschläge und Erläuterungen herausgegeben, die seither in zahlreichen,

immer neu bearbeiteten Auflagen erschienen sind. Bei der Weiterentwicklung trat *Klein* sodann dem mathematischen Unterricht an den auf Universität und technische Hochschule vorbereitenden höheren Schulen nahe. Im März 1894 besuchte er zu seiner Instruktion eine Anzahl höherer Schulen der Stadt Hannover. Im Jahre 1895 hielt der neugegründete „Verein zur Förderung des Unterrichtes in Mathematik und Naturwissenschaften“ auf Einladung *Kleins* seine Jahresversammlung in Göttingen ab, von ihm mit einer Festschrift begrüßt. Die seit 1892 regelmäßig jedes zweite Jahr in Göttingen abgehaltenen naturwissenschaftlichen Ferienkurse für Oberlehrer umfaßten nach dem ursprünglichen Regierungsprogramm die Mathematik nicht mit. *Klein* sorgte dafür, daß auch die Mathematik zur Geltung kam, und nahm sich aufs wirksamste dieser ganzen segensreichen Einrichtung an. Im Jahre 1900 veröffentlichte *Klein* zusammen mit dem Professor der Physik *E. Riecke* unter dem Titel „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen“ die im damaligen Oberlehrerkurse gehaltenen Vorträge. Eine entsprechende Veröffentlichung folgte 1904 unter dem Titel „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen“.

Nach und nach hatte die von *Klein* eingeleitete Agitation zur Neuorganisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen weitere und weitere Kreise ergriffen. So konnte 1904 zur ferneren Durchführung der Arbeiten und Aufstellung von Reformvorschlägen von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte eine besondere „Unterrichtskommission“ eingesetzt werden, an der *Klein* lebhaft mitarbeitete. Im Jahre 1908 folgte die Bildung der „Internationalen mathematischen Unterrichtskommission“, deren Vorsitz *Klein* übernahm. In verhältnismäßig kurzer Zeit gelang es *Klein*, ein geradezu monumentales Werk erstehen zu lassen, nämlich die „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission“. Bei der Herausgabe dieses Werkes, das seit einigen Jahren vollendet vorliegt, stand *Klein* ein ganzer Stab hervorragender Mitarbeiter zur Seite. Das Werk war eigentlich auf fünf Bände veranschlagt, doch füllen die Abhandlungen neun stattliche Bände. Sie betreffen den mathematischen Unterricht an allen Schulgattungen und Lehrinstituten Deutschlands und werden für lange hinaus die sichere Grundlage bei der Behandlung aller einschlägigen Fragen bilden.

Ganz besonders glänzend und umfangreich erscheinen die Erfolge, die *Klein* mit der Entwicklung und Organisation der Göttinger Institute hat erzielen können. Die Stellung der angewandten Mathematik als eines mit der reinen Mathematik gleichberechtigten Faches und die Einrichtung

der erforderlichen Lehrinstitute zunächst für Göttingen sind wesentlich *Kleins* Werk. Wie er dem Auseinanderklaffen der Universitätsmathematik und der Mathematik an den höheren Schulen kräftig entgegenarbeitete, so wollte er auch die „angewandte Mathematik“, die in der darstellenden Geometrie, der Geodäsie und der technischen Mechanik ihren eigentlichen Sitz an der technischen Hochschule hat, mit der bisherigen Universitätsmathematik vereint wissen. Hatte *Klein* doch sogar einmal eine Denkschrift über die Vereinigung der technischen Hochschule in Hannover mit der Universität Göttingen ausgearbeitet. Vorbildlich und anregend in dieser Hinsicht waren für *Klein* die amerikanischen Verhältnisse, die er bei wiederholten Reisen nach den Vereinigten Staaten von Nordamerika kennen gelernt hatte. Indessen sind bei uns in Deutschland die technischen Hochschulen viel zu weit entwickelt und viel zu sehr als selbständige Lehrinstitute ebenbürtig neben die Universitäten getreten, als daß sie noch jetzt als „technische Fakultäten“ den Universitäten angegliedert werden könnten.

Bei dieser Sachlage war es *Kleins* Ziel, besondere Lehr- und Forschungsinstitute für angewandte Mathematik und Physik in Göttingen zu schaffen. Es wurden Einrichtungen für den Unterricht in der Geodäsie getroffen, es entstand ein maschinentechnisches Institut für angewandte Mechanik, ein Institut für angewandte Elektrizitätslehre, in dem die Elektrotechnik in die Universität einzog. Es entwickelte sich überhaupt eine Zeit reicher Institutsgründungen und -erneuerungen für Göttingen. *Klein* hatte in Amerika die glänzenden Ergebnisse der Opferwilligkeit des Privatkapitals für wissenschaftliche Zwecke kennen und schätzen gelernt. *Kleins* Initiative ist es wesentlich zu danken, daß wir in der „Göttinger Vereinigung“ seit 1897 in Deutschland eine Gründung besitzen, in der sich die Spitzen unserer Industrie mit Hochschullehrern zusammengefunden haben, um mit den reichsten Mitteln den Unterricht und die Forschung in der angewandten Mathematik und Physik zu fördern. Schon auf mehr als 20 Jahre einer segensreichen Tätigkeit blickt die „Göttinger Vereinigung“ unter der Führung v. *Böttingers* und *Kleins* zurück. Ihr neuester Plan ist ein umfassender Neubau eines mathematischen Instituts, der bereits letzten Sommer völlig gesichert erschien, und dessen Ausführung durch die Ungunst der Gegenwart hoffentlich nicht zu lange zurückgehalten wird.

Wer das mathematische Göttingen der achtziger Jahre des vorigen Jahrhunderts gekannt hat und mit dem von heute vergleicht, wird erstaunen über die Summe erfolgreicher Schöpferarbeit, die hier getan ist, wird ermessen, in welchem Maße die Universität ihrem *Felix Klein* zu Danke verpflichtet ist. Er



ist es gewesen, der die große Tradition von *Gauß*, die Mathematik überall da, wo sie hingehört, zu Geltung und Wirksamkeit zu bringen, erkannt hat, der es vermocht hat, seine Ideen in den verzweigten Verhältnissen der Gegenwart zu lebendiger Wirklichkeit auszugestalten.

### Felix Klein als junger Doktor.

Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. phil. Dr.-ing. A. Voß.  
München.

An der Universität Göttingen hatten nacheinander von 1807—1866 die drei großen Mathematiker *C. F. Gauß*, *P. G. Lejeune-Dirichlet* und *B. Riemann* gewirkt. Der erste widmete sich freilich, durch seine eigenen Untersuchungen und den wissenschaftlichen Verkehr mit seinen Freunden, wie z. B. *F. Bessel* und *H. C. Schumacher*, beschäftigt, nur selten dem eigentlichen Unterricht von Schülern. Als aber *Dirichlet* 1855 an seine Stelle trat, begann er sogleich aus seinem eigensten Arbeitsgebiet mit den epochemachenden Vorträgen über Zahlentheorie und Potentialtheorie in Verbindung mit der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen, und *Riemann* setzte seit 1859 nicht allein diese Vorlesungen aus der mathematischen Physik fort, sondern legte schon 1861/62 bei der Behandlung der elliptischen Funktionen seine neuen Gedanken über die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen, den Zusammenhang der Flächen und das Abelsche Theorem zugrunde.

Einen großen Verlust aber erlitt die Universität schon bald darauf durch *Riemanns* schwere Erkrankung, welche ihn nötigte, seinen Aufenthalt im Süden zu nehmen, und seinen frühzeitigen Tod 1866, um so mehr, als seine Stelle vorderhand keine Besetzung fand.

An mathematischen Dozenten fehlte es freilich in Göttingen auch jetzt nicht. Hofrat *Ulrich*, ständiger Examinator für das Lehramt in der Mathematik und Physik, vertrat neben der „praktischen Geometrie“ und Mechanik auch die Analysis und Geometrie nach den älteren Methoden. Auch *M. A. Stern*, ausgezeichnet durch die Klarheit seiner Vorträge, deren sich noch manche seiner Schüler dankbar erinnern werden, ging doch nur selten über die Zeit von *J. B. Fourier* hinaus. *B. Schering*, mit der Herausgabe von *Gauß'* Werken im Auftrage der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften beschäftigt, fand für Vorlesungen nur wenig Zeit übrig. *A. Enneper*, von vielseitigen Kenntnissen in der neuern französischen und italienischen Literatur, die er mit großer Sorgfalt in seinen Vorlesungen zu verwenden wußte, gelang es trotzdem nur, eine kleine Zahl von Hörern an sich zu fesseln. Der Physiker *J. B. Listing* behandelte zwar gelegentlich im mathematischen Seminar seine Untersuchungen über den „Census räumlicher Komplexe“ und Fragen aus der Optik, aber das Übermaß seiner geistreichen Terminologie war nicht immer geeignet, wirkliche Einsicht zu fördern. Da auch

die Tätigkeit der Privatdozenten an diesen allgemeinen Zuständen nichts Wesentliches ändern konnte, fehlte es trotz der großen Zahl der Lehrer an einer Persönlichkeit, welche die Studierenden in solche Ideen eingeführt hätte, von denen damals die Wissenschaft erfüllt war.

Das änderte sich nun mit einem Schlage, als zum Winter 1868 *A. Clebsch* von Gießen nach Göttingen berufen wurde. Die schöne Form seines Vortrages, die Freude, die dieser unvergleichliche Lehrer selbst zu empfinden schien, wenn er die Gedanken, die ihn und seine wissenschaftlichen Freunde, wie *A. Cayley*, *C. Jordan*, *L. Cremona* gerade in jener Zeit lebhaft beschäftigten, vor seinen Hörern entwickelte, die Eleganz, mit der er in dieser ersten in Göttingen gehaltenen Vorlesung über Geometrie des Raumes alle neuern Hilfsmittel, von den homogenen Koordinaten und dem Prinzip der Dualität bis zur Theorie der Abbildung der algebraischen Flächen in Verbindung mit dem Abelschen Theorem, und endlich die Neue Geometrie des Raumes von *J. Plücker* behandelte, mußten seine Schüler in eine ganz neue Welt einführen, in die lebhafteste Verbindung mit der Gegenwart versetzen und zum Studium ihrer Literatur anregen.

Unter diesen befand sich auch der damals noch nicht zwanzigjährige *Felix Klein* aus Düsseldorf. Mit Staunen vernahm man, daß dieser junge Mann, dessen liebenswürdige Persönlichkeit über die Jahre hinaus gereift und originell erschien, in der Vorlesung von *Clebsch* als Autorität in dieser Neuen Geometrie des Raumes bezeichnet wurde, mit der *Plücker* in seinen letzten Lebensjahren die Wissenschaft bereichert hatte.

*Plücker* war es ja, der das Prinzip der Dualität, das *V. Poncelet* auf die Polarentheorie der Gebilde zweiter Ordnung (aber mit gleichzeitiger Ausdehnung auf metrische Fragen) begründet hatte, während *J. Gergonne* in seinen Annalen (Band 15—18) es als ein philosophisches aus der Erfahrung abstrahiertes Axiom anzusehen geneigt war, durch seine Punkt- und Geradenkoordinaten in der Ebene, respektive der Punkt- und Ebenenkoordinaten im Raum als ganz unabhängig von der Polarentheorie durch die Lehre von der Inzidenz erwies, und in der völligen Symmetrie des linearen Gebildes in bezug auf die Punkt- und Ebenenkoordinaten  $x, y, z$ ;  $u, v, w$  die Möglichkeit erkannte, jede lediglich durch Doppelverhältnisse charakterisierte Inzidenz in doppeltem Sinne nach dem Muster der „Colonnes doubles“ von *Gergonne* zu deuten.

Aber schon 1864, im System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, § 258, machte er die denkwürdige Bemerkung, daß im Raume neben Punkt und Ebene die Gerade ein in sich selbst duales Gebilde sei, das zu seiner analytischen Darstellung vier voneinander unabhängige Koordinaten erfordere, womit sich zugleich die analytische Behandlung von Räumen noch höherer Dimension eröffnete. Erst nach fast zwanzig

Jahren kam er, inzwischen durch physikalische Arbeiten beschäftigt, auf diesen Gedanken zurück und veröffentlichte in den Proceedings der Mathematical Society of London und den Philosophical Transactions of London von 1865 und 66 in zwei „Fragmenten“ seine neuen Ideen über die Komplexe, Kongruenzen und Geradenkonfigurationen, „to show their importance, greater perhaps than it appears at first sight“. Im Jahre 1865 hatte Plücker den damals kaum sechzehnjährigen Felix Klein zum Assistenten für seine Vorlesungen gewählt, und im fortwährenden Verkehr mit diesem entstand nun ein umfangreiches Werk, die „*Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die gerade Linie als Raumelement*“, dessen erster Teil schon in den Druckbogen fertiggestellt war, als Plücker im Mai 1868 starb. Clebsch in Gießen übernahm die Herausgabe desselben und hob dabei hervor, daß F. Klein, der sich Geist und Methode der neuen Forschung zu eigen gemacht habe, damit beschäftigt sei, den zweiten Teil des Werkes von Plücker in dessen Sinne zu ergänzen, soweit es erforderlich sei. Kurz nach Plückers erster Publikation von 1865 hatte der italienische Mathematiker G. Battaglini die Theorie der durch eine, zwei oder drei algebraische Gleichungen ersten und zweiten Grades zwischen den Koordinaten der Geraden definierten Gebilde mit etwas moderneren Hilfsmitteln behandelt, als sie dem Physiker Plücker im Alter geeignet erscheinen mochten; auch war schon die Dissertation von J. Lüroth, der sich 1866 in Heidelberg habilitiert hatte, durch Clebsch angeregt, die namentlich das durch die Anzahl der überall endlichen Abelschen Integrale gegebene Geschlecht einer Regelfläche bei dieser neuen Begriffsbildung bestimmte.

Da erkannte nun Klein sofort die Wichtigkeit der allgemeinen linearen Transformation der Linienkoordinaten für alle mit ihnen zusammenhängenden Fragen, von der Battaglini keinen Gebrauch gemacht hatte, und die Möglichkeit, an Stelle der Plückerschen Koordinaten  $p_{ik}$ , zwischen denen die Identität

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$$

besteht, seine sechs Koordinaten

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$

als lineare Funktionen der  $p_{ik}$  einzuführen, zwischen denen die Identität

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

besteht, und die Theorie der Komplexe zweiten Grades mit Hilfe der kanonischen Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in bezug auf das System dieser sechs Fundamentalkomplexe  $x_i = 0$  darzulegen. Dabei war von wesentlicher Bedeutung die neueste Arbeit von K. Weierstraß in den Monatsberichten der Berliner Akademie von 1868, welche dem allgemeinen Verständnis wohl manche Schwierigkeiten damals bereiten mochte. So gelang es ihm, die kanonischen Formen aller Komplexe zweiten Grades nach den Elementarteilern der charakteristischen Determinante geordnet im Weierstraßschen Sinne

zu ermitteln, und eine der bei seiner Promotion an der Universität Bonn am 12. Dezember 1868 verteidigten Thesen lautete, daß der von Battaglini für allgemein gehaltene Komplex zweiten Grades bereits in zweifachem Sinne spezialisiert sei.

Durch eine scharfsinnige Kombinatorik der Fundamentalkomplexe und ihrer Lagenbeziehungen untereinander erkannte er zugleich die bereits von Plücker gefundene Singularitätenfläche des allgemeinen Komplexes zweiten Grades fast ohne alle Rechnung, die als in sich selbst duales Gebilde vierter Ordnung und Klasse mit sechzehn Doppelsebenen und Doppelpunkten schon 1864 in E. Kummers Arbeiten aufgetreten war und nun fortan als Kummersche Fläche bezeichnet wurde.

Es hätte für Klein sehr nahe gelegen, in diesem Sinne die Plückerschen Manuskripte umzugestalten. Aber mit der größten Pietät hat er die Methoden seines Lehrers in der schon im Sommer 1869 erfolgten Herausgabe des zweiten Teils der „*Neuen Geometrie*“ beibehalten, über die er eigentlich schon weit hinaus war.

Im Sommer 1869 hörte er bei Clebsch die Vorlesungen über die Invarianten der binären Formen und Optik nach den Untersuchungen von Cauchy in dessen Exercices de physique et de mathématiques. Unter den Teilnehmern an denselben befand sich auch M. Nöther, der schon in Gießen als Schüler von Clebsch den Grund zu seinen eigenen ausgezeichneten algebraischen Untersuchungen gelegt hatte. Beide traten von da ab in regen wissenschaftlichen Verkehr, der alsbald zu einem lebhaften Briefwechsel führte, als Nöther wieder Göttingen verließ, um sich zur Habilitation in Heidelberg vorzubereiten. Welche Fortschritte indes Klein schon sehr bald im Gebiet der Liniengeometrie gemacht hatte, geht namentlich aus seiner Arbeit „*Zur Theorie der Komplexe ersten und zweiten Grades*“ hervor, die bereits im Juni 1869 in den „*Göttinger Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften*“ erschien. Hier tritt zum ersten Male der Begriff der simultanen Invariante zweier linearen Komplexe, deren Verschwinden die involutorische Lage derselben anzeigt, und die Beziehung der nämlichen Kummerschen singulären Fläche zu der  $\infty^1$  Anzahl von Komplexen zweiten Grades hervor, deren analytischer Ausdruck in Analogie zu den konfokalen Systemen von Flächen zweiten Grades gebildet ist, sowie der Hinweis auf eine algebraisch lösbare Gleichung sechsten Grades: ein erster Schritt zu Kleins späteren bahnbrechenden Untersuchungen über die Lösung algebraischer Gleichungen.

Zum Winter 1869/70 ging Klein nach Berlin, wo er auch mit O. Stolz, dem späteren Innsbrucker Professor, der bereits in Wien habilitiert war, zusammentraf. Aber von noch größerer Bedeutung wurde für ihn die Bekanntschaft mit Sophus Lie aus Kristiania. Beide gehörten als besonders tätige Mitglieder dem von E. Kummer geleiteten mathematischen Seminare an, in dem für dieses

Semester die Theorie der Strahlensysteme als Thema gestellt war. Außerdem hörte er bei *L. Kronecker* Theorie der quadratischen Formen und arbeitete sich in die Zahlentheorie ein, die er selbst später eingehend in Vorlesungen behandelte. Auch mit *K. Weierstraß* kam er in Beziehung, doch handelte es sich hier vorwiegend um algebraische Fragen, über die er mit *Nöther* korrespondierte.

Von besonderer Wichtigkeit aber ist es, daß er schon im Seminar bei *Weierstraß* ein Referat über *A. Cayleys* projektive Maßbestimmung in bezug auf ein „absolutes“ Gebilde zweiten Grades von 1859 hielt, denn hieran knüpften sich bald seine tiefen Gedanken über *Nichteuklidische Geometrie*.

Im Frühjahr 1870 verließ *Klein* Berlin, um in *Paris* mit seinem Freunde *Lie* wieder zusammenzutreffen. Als Frucht ihrer gemeinsamen Berliner Studien war bereits die Arbeit „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces“ entstanden, welche durch *M. Chasles* der Pariser Akademie zur Aufnahme in die *Comptes Rendus* vorgelegt wurde. Erst 1870/71 ist ein Teil des reichen Materials, das in derselben enthalten ist, im Band II der *Mathematischen Annalen* erschienen.

Zugrunde liegt dort ein damals ganz neuer Gedanke, nämlich die Untersuchung aller geometrischen Gebilde *A*, die durch Transformationen *T* in sich übergehen, bei denen also alle Gebilde *B*, die mit *A* in einer durch die Transformationen *T* unzerstörbaren Beziehung stehen, diese letztere beständig bewahren. Diese Auffassung, die *Lie* später in seinen großen Arbeiten über kontinuierliche Transformationsgruppen, *Klein* aber namentlich in bezug auf diskrete Transformationen verwandte, wurde hier zur Untersuchung derjenigen „ebenen Kurven *W*“ benutzt, welche durch  $\infty^1$  lineare, mithin vertauschbare *T*, die ein „geschlossenes“ System, d. h. eine Gruppe bilden, in sich übergehen. Es gelang das in einfachster Weise durch die Normalformen der fünf Klassen von Kollineationen, welche der Beschaffenheit der bei diesen letzteren fest bleibenden Punkte resp. Geraden entsprechen, die in geeigneter Weise ins Unendliche verlegt wurden. So ergibt sich anschaulich nicht allein die Gesamtheit der Gleichungen der Kurven *W*, sondern zugleich eine große Zahl merkwürdiger Eigenschaften derselben, zu denen schließlich der wohl *Lie* angehörende Satz hinzutritt, daß jede Differentialgleichung erster Ordnung, welche  $\infty^1$  bekannte (nicht triviale) Transformationen in sich zuläßt, durch Quadratur integrierbar ist.

Die Redaktion dieser Arbeit stammt von *Klein*. Wenn dabei fast stärker die Ideen von *Lie* hervortreten, so beruht das wohl auf der Gewissenhaftigkeit, mit der er den Anteil seines Freundes an derselben bezeichnen wollte.

Daneben tritt aber auch schon die an das „*Erلانger Programm*“ von 1872 anklingende Forde-

rung auf: „Es sind die Eigenschaften solcher geometrischen Gebilde zu entwickeln, die aus einem willkürlich gewählten durch Gruppen von unendlich vielen unter sich vertauschbaren linearen Transformationen hervorgehen.“

Im Besitze dieser Gesichtspunkte waren *Klein* und *Lie* indessen schon in weit größerem Umfange im Winter 1869/70. Denn die Arbeit in den *Comptes Rendus* von 1870, S. 1222 und 1275, bezieht sich auf die Ausdehnung derselben auf den Raum, d. h. auf „Systeme von Kurven *V*“, welche durch eine unendliche Zahl linearer Transformationen in sich übergehen. Insbesondere wird, da unter solchen Transformationen sich jedenfalls auch eine bestimmte unendlich kleine befindet, bei der aus dieser entspringenden Gruppe vertauschbarer Transformationen jedesmal ein eigentliches oder uneigentliches Tetraeder fest bleiben. Und nun richtete sich die weitere Untersuchung auf die Flächen *V*, die durch Kurven *V* erzeugt werden. So ergibt sich eine große Anzahl von auf ein allgemeines Theorem zurückgeführten Sätzen, deren Inhalt immer noch lange nicht erschöpft sein dürfte.

Für *Klein* stand es nun fest, sich noch im Winter in Göttingen zu habilitieren. Zuvor aber wollte er nach England, vielleicht auch nach Italien gehen, wohl um dort *A. Cayley* und *E. Beltrami* zu sprechen, deren Arbeiten zu seinen Nichteuklidischen Ideen in so naher Beziehung standen.

Der Krieg zwischen Deutschland und Frankreich aber vereitelte diesen Plan. *Klein*, für den Felddienst nicht geeignet befunden, meldete sich freiwillig zum Sanitätsdienst im Heere und war in dieser Eigenschaft auch an den auf die großen Kämpfe bei Metz und Sedan folgenden Tagen tätig. Erkrankt mußte er dann nach seiner Heimat zurückkehren, doch hatte er Mitte November die frühere Gesundheit wiedererlangt. *Lie* war zunächst noch in Paris geblieben, wurde aber dort verhaftet, weil man in seiner Korrespondenz mit *Klein* in dem häufig wiederkehrenden Worte „Komplex“ eine Chiffre für Spionage vermutete; erst die Aussage des ihm befreundeten Mathematikers *G. Darboux* klärte das Mißverständnis auf und befreite ihn aus der Haft.

Im Laufe des Winters 1870/71 erweiterten sich *Kleins* Ideen über Nichteuklidische Geometrie, wie aus seinen Briefen an *Nöther* vom 17. Dezember 1870, dann vom 12. März 1871, hervorgeht, immer mehr. Als Grundhypothese erscheint ihm zunächst noch die projektive Eigenschaft des Raumes, für den nach *Euklid* der imaginäre Kreis als „Absolutes Gebilde“ im Sinne von *Cayleys* Untersuchungen, die sich indessen nur auf die Ebene bezogen, auftritt, dann aber führt ihn das Studium der Arbeiten *Chr. von Staudts* zu der Ansicht, daß die projektive Geometrie in Wirklichkeit unabhängig vom Parallelenaxiom sei und letzteres nur scheinbar bei *von Staudt* vorausgesetzt werde. Diese wichtige

Bemerkung (man vergleiche übrigens die Note in den Göttinger Nachrichten von 1872, „Über einen Satz der Analysis situs“) wird nun zum Fundament einer grundlegenden Untersuchung über *Nicht-Euklidische Geometrie*. Und aus *Beltramis* Satz, daß nur in Räumen von konstantem Krümmungsmaß die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen sich darstellen lassen, erkennt er bereits, daß die Vierseitskonstruktion von *G. Desargues* nicht in der Ebene bewiesen werden kann, sondern den Raum notwendig voraussetzen muß. Er überzeugt sich auch schon davon, daß von den von *H. Helmholtz* in den Göttinger Nachrichten 1868. „Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen“, aufgestellten Axiomen jedenfalls eines, das Monodromieaxiom überflüssig sei (man vergleiche namentlich die) ausgedehnten Untersuchungen von *Lie* in dessen Theorie der Transformationsgruppen, Band III, S. 438 ff., 1893). Und aus derselben Zeit stammt auch schon die Einsicht, daß die elliptische Geometrie, als deren Abbild man die Geometrie auf der Kugel ansah, obwohl hier die von einem Punkte ausgehenden „geradesten“ Linien sich in dem Gegenpunkte wieder treffen, ihr adäquates Abbild durch das Strahlenbündel findet. Doch muß die genauere Betrachtung aller dieser Dinge einer anderen Darstellung vorbehalten bleiben, während es hier darauf ankam, hervorzuheben, wie frühe schon dieselben den jungen Doktor *Klein* beschäftigt haben.

Im Winter 1870 entstand aber noch eine weitere gemeinsame Arbeit mit *Lie*; es ist die über die Haupttangentialkurven der Kummer'schen Fläche. *Lie* hatte sie zunächst als algebraische Kurven 16. Ordnung gefunden, während *Klein* in den Beziehungen dieser Fläche zu dem System der konfokalen Komplexe zweiten Grades die Möglichkeit erkannte, alle ihre Singularitäten und charakteristischen Zahlen im Sinne von *Cayleys* Erweiterung der *Plückerschen* Formeln für ebene Kurven auf den Raum, sowie die Existenz von sechs ausgezeichneten Haupttangentialkurven 8. Ordnung und Klasse zu erkennen, eine Arbeit, die noch im Dezember 1870 in den Monatsberichten der Berliner Akademie erschien. Und die zierlichen Arabesken, welche diese Kurven innerhalb der Systeme der parabolischen Kurven der Fläche bilden, wurden von ihm später als Ornament für ein Ballkleid seiner Braut *Anna Hegel*, einer Tochter des bekannten Historikers *K. Hegel*, die er noch in Erlangen als Frau in sein Heim einführt, verwandt.

*Klein* besaß überhaupt ein durch die lebenswürdigsten Umgangsformen unterstütztes reiches geselliges Talent, das er in Göttingen und Erlangen gern unter den Kollegen verwandte. In Erlangen demonstrierte er sogar einmal die für das von ihm dort gegründete mathematische Seminar angeschaffte Thomassche Rechenmaschine, wozu auch die Frauen der Kollegen eingeladen waren. Nicht alle gelangten aber zu gleichem Verständ-

nis, und einer der Herren glaubte sogar aus dem Vortrage den Schluß ziehen zu können, daß Mathematik überhaupt keine Wissenschaft sei, da sie auch mittels einer Maschine hervorgebracht werden könne.

Man würde aber eine unrichtige Vorstellung von dem jungen Professor gewinnen, wenn man ihn in Rücksicht auf seine originelle, in alle Formen der täglichen Erlebnisse hineinragende mathematische Ideenbildung ausschließlich mit rein mathematischen Gedanken beschäftigt ansehen wollte. Wirkte dem schon entgegen seine physikalische Schulung als Assistent *Plückers*, so war er selbst auch in Erlangen eifrig bemüht, gegen die Übermacht des mathematischen Denkens ein Gegengewicht zu finden. So arbeitete er anatomisch unter dem Zoologen *E. Selenka*, und mit dem befreundeten Botaniker *M. Reeb* bot das Studium der niedersten pflanzlichen Organismen ein vielseitiges Interesse.

Noch im Januar 1871 habilitierte sich *Klein* in Göttingen. „Ich hatte außerordentliches Glück bei der Habilitation“, schrieb er unmittelbar danach an *Nöther*. Von der Vorlage einer besonderen Habilitationsschrift sah die Fakultät angesichts seiner hervorragenden Arbeiten ab, und der ganze Akt, bei dem er Modelle von Komplexflächen als Thema einer Probevorlesung zu besprechen hatte, klang in die warme Anerkennung aus, die *Clebsch* dem jungen, so viel versprechenden Dozenten zollte. Noch in den Wintermonaten hielt er mit einigen Studierenden geometrische Übungen ab, für den Sommer hatte er neben einem zweistündigen Publikum über Komplexe eine vierstündige Vorlesung über theoretische Optik angezeigt in der Absicht, dieselbe nicht in ausschließlich abstrakt mathematischem Sinne, sondern mit fortwährender Beziehung auf die wirklichen Erscheinungen zu halten. An derselben nahmen neun Hörer teil; unter den damaligen Frequenzverhältnissen eine sehr befriedigende Anzahl).

Das Jahr 1871 ist nun merkwürdig durch die große Zahl von Arbeiten *Kleins*, von denen fast jede bedeutungsvoll für seine spätere Entwicklung geworden ist. Die Note in den Göttinger Nachrichten vom August „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“ betont zunächst, daß es sich nicht um die philosophischen Spekulationen handelt, welche zum Teil zu den Arbeiten von *Gauß*, *Lobatscheffskij*, *Bolyai* und insbesondere zu den Betrachtungen von *Riemann* und *Helmholtz* hingeleitet haben, sondern will die mathematischen Resultate, insoweit sie sich auf die Parallelenlehre beziehen, einem allgemeineren Verständnis durch den Nachweis deutlich machen.

Die Zahl der Hörer war in den sechziger Jahren bei mathematischen Vorlesungen immer nur gering; einzelne Dozenten haben gelegentlich vor 1-2 Hörern vorgetragen. Zu der Vorlesung von *Clebsch* über Abel'sche Funktionen (Winter 1872) fanden sich dagegen fast 70 ein.

daß die projektive Maßbestimmung, welche *Cayley* 1859 im sixth memoir upon quantics (Phil. Transact. 149) in bezug auf eine Fundamentalkurve zweiter Ordnung in der Ebene konstruierte, bei geeigneter Ersetzung durch eine *Fundamentalfäche* zweiter Ordnung je nach der Natur derselben nicht nur ein *Bild* oder eine *rein mathematische Transformation* der verschiedenen Parallelen theorien ist, sondern das *innere Wesen derselben aufdeckt*. Indem *Klein* die Unterscheidung der Unendlichkeit des Raumes von seiner Unbegrenztheit nach *Riemann* sich zu eigen macht, erhält er mittels der *Verallgemeinerung der Cayley'schen Untersuchung für den Raum* und eines *prinzipiellen Maßbegriffes* die drei Geometrien, welche hinfort als *elliptische, hyperbolische und parabolische* in der Wissenschaft auftreten, und die nicht nur, wie bei *Cayley*, mathematische Interpretationen der Euklidischen Geometrie sind, sondern unabhängig davon ihr eigenes selbständiges Wesen darlegen.

Neben diesen Gedanken, deren prinzipielle Gestalt hier wohl noch einmal historisch hervorgehoben werden durfte, beschäftigten ihn gleichzeitig noch viele andere. Die an *C. Jordans* traité des substitutions anknüpfende Arbeit „Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen“ vom Mai 1871 (Math. Annalen IV, S. 346) geht von dem Gedanken der durch kontinuierliche vermittelten diskreten Gruppen aus. Danach deckt sich die Galoissche Theorie der (allgemeinen) Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades mit der der Invarianten und Kovarianten von  $n$  Elementen im Raum von  $n - 2$  Dimensionen derart, daß den Vertauschungen der Wurzeln untereinander die linearen Transformationen dieses Raumes entsprechen. Schon dort wird im Anschluß an das Vierseit in der Ebene, das Sylvestersche Pentaëder der Fläche dritter Ordnung, auf die allgemeine Gleichung vierten und fünften Grades hingewiesen und die von *C. Jordan* behandelte Theorie der Wendepunkte der allgemein ebenen Kurve dritter Ordnung dargelegt. Weit wichtiger aber wird die geometrische Repräsentation der allgemeinen Gleichung sechsten Grades, welche die Wurzeln durch sechs gegenseitig in Involution liegende lineare Komplexe darstellt und zu Resolventen zehnter und fünfzehnter Ordnung führt. So treten hier die Anfänge von *Kleins* späteren großen Arbeiten über die Gleichungen siebenten Grades bereits im Keime hervor.

Die Göttinger Nachrichten von 1871 (S. 44) greifen nochmals auf die Haupttangentialkurven der Kummerschen Fläche zurück. An die Stelle der früheren geometrischen Überlegung tritt jetzt ein neues Moment, die wirkliche *Integration der Differentialgleichungen dieser Kurven*, die nach Analogie der elliptischen Koordinaten sich ausführen läßt.

Und endlich ist noch der Note vom Juni 1871 (in den Math. Annalen IV) zu gedenken über

den *Zusammenhang der Mechanik starrer Körper mit der Liniengeometrie*. Hier wird zunächst die schon von *Plücker* erkannte Identität des Nullsystems von *Staudt* und *A. F. Möbius* mit dem linearen Komplex hervorgehoben, und der Satz, daß die konjugierten Geraden des Komplexes solche sind, nach denen Kräfte resp. unendlich kleine Rotationen auftreten müssen, wenn sie mit einem gegebenen Kraftsystem resp. einer gegebenen unendlich kleinen Rotation äquivalent sind. Sodann werden nach *Plücker* die 6 Koordinaten der Geraden den Intensitäten einer Kraft resp. einer unendlich kleinen Rotation proportional gesetzt, womit deren Komponenten und Drehungsmomente bestimmt sind. Und nun setzen sich Kräfte und Rotationen zusammen durch Addition dieser Koordinaten. Genügt ein so entstandenes System von 6 Koordinaten der *Plücker'schen Identität*, so kann es durch eine Einzelkraft resp. durch eine unendlich kleine Rotation ersetzt werden. Der *physikalische Zusammenhang* zwischen Kräften und unendlich kleinen Bewegungen aber wird durch die *Arbeit* bezeichnet, welche das gegebene Kraftsystem bei einer gegebenen unendlich kleinen Bewegung leistet. Ist diese Arbeit Null, so läßt sie sich in *dualistischer Weise* auffassen, denn die homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten des Kraftsystems stellt dann eine unendlich kleine Rotation vor, und umgekehrt wird durch eine solche Gleichung zwischen den Koordinaten einer unendlich kleinen Bewegung ein Kräftesystem bestimmt, so daß es sich um die *durch den Arbeitsbegriff vermittelte Involution linearer Komplexe handelt*. Diese an und für sich sehr einfachen Bemerkungen sind später im Sinne einer eigentlichen *Dynamik* von *R. S. Ball* ausgebildet; sie durften hier wohl nicht übergangen werden, da sie die Veranlassung zu *F. Lindemanns* Dissertation über „Unendlich kleine Bewegungen und Kraftsysteme bei allgemeiner projektiver Maßbestimmung“ gegeben haben.

Für den Winter 1871 hatte *Klein* als Vorlesung angezeigt: „Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und das Gesetz von der Erhaltung der Kraft“, vierstündig (außerdem geometrische Übungen), ein Zeichen, wie seine Interessen immer noch zwischen Physik und Mathematik hin- und hergingen. Außerdem beschäftigten ihn vielfach allgemeine Fragen, so namentlich die *Bildung einer Mathematiker-Vereinigung*, deren Zweck nicht so sehr in akademischen Vorträgen, sondern in der durch den gegenseitigen Verkehr ermöglichten Aussprache über gemeinsame Interessen der Forschung bestehen sollte. Sie kam freilich erst Ostern 1874 in Göttingen zustande. Aber daß es seit der *Naturforscherversammlung zu Heidelberg* 1889 zur Bildung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung kam, die gegenwärtig 770 Mitglieder zählt und eine große wissenschaftliche Tätigkeit entfaltet hat, wird man jedenfalls auch diesen ersten Anregungen *Kleins*

zu danken haben, die in den „*Bremer Beschlüssen*“ 1890 feste Gestalt gewannen.

Das Jahr 1872 ist wieder durch einen Reichtum an neuen Gedanken ausgezeichnet. Da ist zunächst der für die Liniengeometrie fundamentale Satz (Göttinger Nachrichten März 1872) zu erwähnen, daß jeder Linienkomplex durch eine Gleichung  $K=0$  zwischen seinen Plücker'schen Linienkoordinaten dargestellt werden kann, weil aus einer Mannigfaltigkeit von  $n \geq 4$  Dimensionen, aus der durch eine quadratische Gleichung  $P=0$  eine  $M_{n-1}$  ausgeschieden ist, jede in der letzteren enthaltene  $M_{n-2}$  durch eine weitere Gleichung ausgedrückt werden kann, falls nicht alle fünfzehnjährigen Unterdeterminanten von  $P$  gleich Null sind. Der Beweis wird durch Abbildung von  $P=0$  geführt; überhaupt hat sich Klein in jener Zeit viel mit der algebraischen Abbildung von Komplexen beschäftigt. — Auch der Plan zu einem Lehrbuch der Liniengeometrie, der allerdings nie ausgeführt wurde, ist damals schon entworfen. Und in einem Briefe an *Nöther* vom 13. März 1872 berichtet er schon über die fünf Typen der Flächen dritter Ordnung, die er nach ihrem Zusammenhang mit den fünf Klassen von *L. Schläfli* entsprechend findet und zugleich übersichtlich durch Modelle darzustellen mußte. Diese Bemerkungen deuten schon auf die in den *Math. Annalen* VI, 1873, veröffentlichte Arbeit über Flächen dritten Grades hin, in der Überlegungen, die bisher nur für Kurven in der Ebene verwandt waren, im Sinne der *Analysis situs* benutzt wurden, sowie auf die merkwürdige aus dem Jahre 1876 stammende „*Neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve*“.

Die bereits vom November 1871 datierte Arbeit von *Lie*: „Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe mit Anwendung auf partielle Differentialgleichungen“, welche im lebhaftesten Verkehr mit *Klein* entstanden war und manche Gedanken desselben in sich aufgenommen hat, erschien 1872 im Band V der *Math. Annalen*, S. 145. Sie enthält neben den Grundzügen einer Differentialgeometrie der Liniengebilde insbesondere den merkwürdigen und völlig neuen Zusammenhang zwischen Linien- und Kugelgeometrie, derart, daß den Haupttangentialkurven der ersten Geometrie die Krümmungslinien der zweiten entsprechen. Hieran schloß sich die ebenfalls schon im Oktober 1871 eingereichte Arbeit von *Klein* über Liniengeometrie und metrische Geometrie, die in viel weiterem Umfange, wie z. B. in den gleichzeitigen Untersuchungen von *Darboux* über Orthogonalsysteme in höheren Räumen, den Zusammenhang zwischen der Liniengeometrie und der metrischen Geometrie eines Raumes von vier Dimensionen, resp. der Geometrie des linearen Komplexes und der metrischen Geometrie des gewöhnlichen Raumes begründet.

Hier findet sich zuerst die Auffassung der Liniengeometrie als Geometrie einer quadrati-

schen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen im Raum von fünf Dimensionen. Aber noch mehr. Die metrische Geometrie eines Raumes  $R_{n-1}$  von  $n-1$  Dimensionen läßt sich als stereographische Projektion der Geometrie auf einer im nächst höheren Raume  $R_n$  gelegenen „Fläche“ oder Mannigfaltigkeit zweiten Grades  $M_{n-1}^2$  ansehen, wobei nun im Raume  $R_{n-1}$  als Fundamentaltgebilde eine  $M_{n-3}^{1,2}$ , auf der  $M_{n-1}^2$  aber der gewählte Projektionspunkt als solches auftritt. Den linearen Transformationen des  $R_{n-1}$ , bei denen das Fundamentaltgebilde  $M_{n-3}^{1,2}$  ungeändert bleibt, entsprechen dann diejenigen Transformationen des  $R_n$ , welche die gegebene „Fläche“  $M_{n-1}^2$  und ihren Projektionspunkt nicht ändern.

Und nun zeigt sich, wie es möglich wird, die Lehre von den Krümmungslinien und Orthogonalsystemen auf Liniengeometrie zu übertragen, wobei sich zugleich die Bestimmung der Haupttangentialkurven einer großen Zahl von Flächen ergibt.

In dem weiteren Aufsätze „Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen“ wird dagegen für Komplexe zweiten Grades mit gemeinsamer singulärer Fläche mit Hilfe der elliptischen Koordinaten *Jacobis* eine ganze Reihe von Integrationsproblemen erledigt. So für den allgemeinen Komplex zweiten Grades die Aufgabe 1. diejenigen Kongruenzen, deren Geraden Haupttangentialkurven ihrer Brennflächen sind, 2. die von den Linien der zwei solchen Komplexen mit derselben singulären Fläche gemeinsamen Kongruenz umhüllten Kurven zu bestimmen, nebst anderen Erweiterungen.

Für den Winter 1872/73 hatte *Klein* beabsichtigt, eine Vorlesung über analytische Geometrie des Raumes zu halten. Da kam der *Ruf als ordentlicher Professor der Mathematik nach Erlangen*, der ihn, der von allen wohl am tiefsten in die Forschungen von *Staudt* eingedrungen war, zu dessen, wenn auch nicht unmittelbarem Nachfolger machte. Aber schon am 7. November erlag *Clebsch* zu allgemeiner Bestürzung einer tödlichen Krankheit. Tief erschüttert reiste *Klein* wieder nach Göttingen, und seine Bemühung ging zunächst dahin, dem hochverehrten Lehrer und Freunde ein literarisches Denkmal zu setzen. So entstand der „Versuch einer Darlegung und Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen von *Clebsch* von seiten einiger seiner Freunde“. Zu demselben lieferten Referate über die Arbeiten von *Clebsch* in der mathematischen Physik, den partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung, der Geometrie, der Abelschen Funktionen und ihrer Verwendung in der Geometrie der Kurven und Flächen, der Abbildung der algebraischen Flächen und der Invariantentheorie die Mathematiker des ganzen Kreises, der sich um *Clebsch* als Mittelpunkt gebildet hatte, die Herren *K. von der Mühl*, *A. Mayer*, *J. Lüroth*, *A. Brill*, *M. Nöther*, *P. Gordan*.

während die Verarbeitung derselben zu einer einheitlichen Fassung schließlich nach einer gemeinsamen Besprechung in Göttingen (Weihnachten 1872) die Hauptaufgabe von *Klein* wurde.

Gleichzeitig wurden die hinterlassenen Manuskripte von *Clebsch* geordnet, und es entstand die Absicht, seinen Schüler *F. Lindemann* zur Bearbeitung der Vorlesungen über Geometrie zu veranlassen.

Aber damit waren *Kleins* Bemühungen noch nicht erschöpft. Es handelte sich ganz wesentlich darum, durch einen neuen, mit dem Teubnerschen Verlage abzuschließenden Vertrag über die Redaktion der Mathematischen Annalen für die in bedrängter Lage zurückgebliebene Witwe von *Clebsch* Mittel zu schaffen, und gleichzeitig würde zu diesem Zwecke die Aufforderung zu freiwilligen Beiträgen an seine Schüler und Freunde gerichtet. Auf diese Weise gelang es, nebst der von der Universität gegebenen Unterstützung ein Kapital zu bilden, das zur Erziehung der vier Söhne von *Clebsch* ausreichen konnte. In die Redaktion der Mathematischen Annalen traten neben *C. Neumann* nun *Gordan* und *Klein* ein, so daß dieser sie jetzt seit 46 Jahren geführt hat.

Mit der Erlanger Professur beginnt eine neue Periode in *Kleins* Leben, deren Ergebnisse hier nicht weiter verfolgt werden können, doch seien noch einige allgemeine Bemerkungen gestattet.

Die ausgezeichneten Eigenschaften des jugendlichen Dozenten zeigten sich zunächst in der ungewöhnlichen *Vielseitigkeit seiner Begabung*, die zu schildern versucht wurde. Man erkennt sein *divinatorisches wissenschaftliches Taktgefühl*, die *Originalität* seiner Konzeptionen, seine merkwürdige Fähigkeit, überall an den Untersuchungen anderer gerade den Punkt zu entdecken, der mit seinen eigenen Gedanken in Verbindung stand. So war für *Klein* eine Fruchtbarkeit der Produktion möglich, welche denen, die jede mathematische Abhandlung erst vom Anfang an studiert haben mußten, versagt bleiben konnte.

Gleichzeitig besaß er die Gabe, jeden seiner Schüler auf das Thema hinzuweisen, das dessen besonderer Begabung und Entwicklung entsprach. So regte er *A. Weiler* aus Stäfa, der als Schüler von *W. Fiedler* in Zürich den Gebrauch homogener Koordinaten und des Dualitätsprinzips gründlichst kennen gelernt hatte, zur systematischen Bearbeitung der Komplexe zweiten Grades an; ein anderes Beispiel gibt *A. Harnacks* Arbeit über die Verwendung der elliptischen Funktionen in der Geometrie der Kurven dritter Ordnung, der sich schon unter *F. Minding* in Dorpat in die Analysis eingearbeitet hatte. Und auch aus etwas spröderem Stoffe wußte *Kleins* Initiative Funken zu schlagen; so bei *L. Wedekind*, dessen Arbeiten über das komplexe Doppelverhältnis bei *Klein* selbst schon die Theorie des Ikosaeders vorbereiten sollten.

Im persönlichen Verkehr aber mit seinen

Schülern streute er die Goldkörner seines reichen Talentes aus, unbekümmert um den Gebrauch, den sie später davon machen könnten, denn er war nicht der engherzigen Ansicht solcher, die in ihren Schülern nur spätere Konkurrenten zu sehen geneigt waren.

Aber *Klein* beschäftigte sich nicht nur etwa mit den besonders Begabten. Ihm lag vor allem am Herzen die *Erzielung tieferen Wissens bei allen denen, die einst auf den Gymnasien und Realschulen die Mathematik zu lehren* haben würden. Wie man *wissenschaftlich arbeiten lerne*, das zu zeigen sei die Hauptaufgabe des Dozenten, führte er schon in Erlangen in seiner Rede zum Eintritt in die Fakultät aus, und dazu sei nichts wirksamer als die den Abschluß der Universitätsstudien bezeugende Ausarbeitung einer Dissertation unter sachgemäßer Leitung des Lehrers, die ihren Erfolg auch dann nicht verfehlen werde, wenn sie etwa die einzige höhere Leistung des Betreffenden bleibe.

Und dieser Zweck bestimmte auch die *Form seiner Vorlesungen*. Absolute Vollständigkeit wird immer dazu führen, daß der Inhalt in den Anfangsstadien stecken bleibt und die Hörer ermüdet; daher suchte er überall darauf hinzuwirken, daß an der Hand der reichlich gebotenen literarischen Nachweise dieselben zu eigener Vertiefung in solche Fragen angeleitet wurden, die in der Vorlesung selbst nur im allgemeinen durch anschauliche Ideen bezeichnet waren.

Diese einfache Skizze darf aber nicht ohne ein Wort des herzlichsten Dankes schließen, der alle Schüler *Kleins* erfüllt, und dessen auch der Verfasser verehrungsvoll gedenkt. Die zwischen *Klein* und ihm im Winter 1868/69 entstandene Bekanntschaft fand schon Ostern 1869 ihr Ende, als der letztere in den Schuldienst übertrat. Als er sich zum Winter 1872 entschloß, zu weiterem Studium wieder nach Göttingen zu *Clebsch*, der damals auf der Höhe seines Ruhmes stand, zurückzukehren, erfuhr er, daß *Klein* und *Lies* *W-Kurven* in naher Beziehung zu seiner eigenen kleinen, aus der Lektüre von *Chasles' traité de géométrie supérieure* entstandenen Arbeit standen. In der lebenswürdigsten Weise nahm *Klein* seine Entschuldigung entgegen, das ganz übersehen zu haben, und forderte ihn auf, nach Erlangen zu kommen, da der Aufenthalt in Göttingen nach *Clebsch' Tod* keinen Zweck mehr haben konnte. Dort hatte er das Glück, während fast 4 Monaten täglich mit dem ausgezeichneten Freunde zu verkehren, an seinem Beispiel zu lernen. Seitdem haben, je mehr *Kleins* Gedanken sich den großen Fragen der Riemann-Weierstraßschen Funktionentheorie und der universalen Beherrschung der gesamten Mathematik zuwandten, viele andere die gleiche Förderung ihres Strebens gefunden. Sie alle werden jetzt den Jubilar verehrungsvoll begrüßen mit dem Wunsche, daß die unvergleichliche Elastizität seines Geistes ihm noch lange erhalten bleibe, und so wird dieser siebzigste Ge-

burtag aufs neue in schönster Weise bestätigen, welchen Segen die Wirksamkeit eines deutschen Professors weithin verbreitet hat.

## Klein und die Mathematik der letzten fünfzig Jahre.

Von Prof. Dr. W. Wirtinger, Wien.

Inter arma silent musae. Von Herzen hätte ich gewünscht, daß wir in ruhiger und ungetrübter Betrachtung uns die Wurzeln, die Vorbedingungen, die treibenden Kräfte von Kleins Wirksamkeit hätten vor Augen führen können, und das Unterscheidende und Gemeinsame mit anderen großen Gelehrtenaturen uns zum Bewußtsein bringen. Das Schicksal hat es anders gewollt. Nach den wechselvollen Ereignissen der letzten Zeit suchen nicht nur die Staaten, nein, sucht überhaupt die menschliche Gesellschaft nach neuen Formen und nach neuer Ordnung für die im Grunde immer gleichen Triebe des Einzelwesens. Eine Welt ist in Trümmer gegangen und wir müssen uns eine neue aufbauen. Ich meine nicht unsere Wissenschaft, denn was wir in der Monarchie bewiesen haben, bleibt auch in der Republik wahr. Vielmehr denke ich dabei an die ganze Stellung der reinen Wissenschaft in der künftigen Gesellschaftsordnung, deren Umrisse wir langsam heraufkommen sehen.

Es ist mir nicht zweifelhaft, daß wir mehr als bisher die Notwendigkeit und die Bedeutung unserer Wissenschaft öffentlich vertreten müssen, und zwar mit Gründen, welche auch dann noch ihre Tragkraft behalten, wenn sie nicht mehr durch überlieferte Werturteile über Kulturformen mehr gefühlsmäßig gestützt werden. Wir werden vielmehr in einleuchtender Weise weiteren Kreisen klarlegen müssen, daß unsere Wissenschaft und ihre Lehre auf dem Wege des Fortschrittes der menschlichen Entwicklung ein Förderer und Wegweiser ist, der Pflege und Geltung reichlich lohnt. Für den Mathematiker selbst ist die Wissenschaft gewiß ebenso Selbstzweck, wie für den Künstler die Kunst. Die Lösung der Spannungen, welche die ungelöste Aufgabe bietet, die durch diese gewonnene Herrschaft über die Begriffe und endlich die Macht, welche die Einsicht oft auf dem Gebiete der Wirklichkeit gibt, sind dem Fachmann geistige Bedürfnisse, denen er sich nicht entziehen kann. Aber das sind innere Erlebnisse, die der Mitteilung bedürfen, um auch in andern wirksam zu werden, einer Mitteilung, für welche die Empfänger viel mehr eigenartige Vorbedingungen erfüllen müssen, als für die künstlerische. Man kann es auch verstehen, daß die Mitteilung eines solchen inneren Erlebnisses für manche unter den Größten mehr eine lästige Pflicht war, da ja das Hauptziel, die eigene Klarheit, schon erreicht war.

Klein hat niemals mit der Mitteilung seiner Ergebnisse gekargt und auch die Wege, auf denen er vordrang, hat er immer offen dargelegt. Seine

Anfänge kamen von Plücker und von Clebsch, von denen der erste ein Meister der Anschauung, der zweite ein ebensolcher des Kalküls war, und die Architektur der Algebra geradezu künstlerisch handhabte. Der erste wird vielleicht durch die Freude an der Gestalt, der zweite durch die Durchsichtigkeit der Darstellung und die Fähigkeit, weitumfassende Gedankenkreise fruchtbar zu verbinden, für Klein besonders förderlich gewesen sein, beide aber durch die Begeisterung, mit der sie ihrer Wissenschaft lebten. In der Tat fällt es schwer, seine weitere Entwicklung an die streng systematische und in dieser Zeit — Ende der sechziger Jahre — noch mit der Gestaltung des spröden Stoffes ringende Weierstraßsche Richtung anzuschließen, für welche die Erledigung eines bestimmten Problems an und für sich eine grundlegende Forderung bildete, während Klein die Wechselbeziehungen verschiedener Teile der Mathematik besonders lebendig und fruchtbar zu machen verstand. Das zeigt sich schon in der ersten Periode seiner Wirksamkeit, die man von 1869 bis etwa 1874 rechnen kann und deren Hauptleistungen die Arbeiten zur Nichteuklidischen Geometrie und das Erlanger Programm von 1872 sind, das unter dem Titel „Vergleichende Betrachtungen über einige neuere geometrische Forschungen“ den Begriff der Gruppe als ordnendes und zusammenfassendes Prinzip in der Geometrie aufweist und darüber hinaus die neuen Probleme, die daraus entspringen, skizziert. Es ist interessant, daß das uns heute so geläufige Wort „Gruppe“ bei Klein selbst 1871 im Titel einer mit Lie zusammen verfaßten Arbeit noch umschrieben wird mit dem Worte *geschlossenes System von Transformationen*. Aber darüber berichten ja andere in diesem Hefte ausführlicher. Zum ersten Male erscheint 1874 der Name Riemanns im Titel der Arbeit „Über eine neue Art Riemannscher Flächen“. Hier wird für reelle Tangenten der Berührungspunkt, für imaginäre aber der einzige reelle Punkt derselben als Bild des Kurvenpunktes resp. der Stelle des algebraischen Bildes aufgefaßt. Das Dualitätsprinzip, die Staudtsche Imaginärtheorie, die allgemeine Auffassung der Riemannschen Mannigfaltigkeit mit einer quadratischen Differentialform sind hier mit einemmal in der einfachsten Weise in Beziehung gesetzt und für die reellen Züge algebraischer Kurven, also anschauliche Fragen verwertet.

Der Name Riemann kehrt seither immer wieder, und es hat wohl kein Mathematiker soviel für das Verständnis und die Fruchtbarmachung von dessen Ideen getan, wie gerade Klein. Die Durchdringung und Verbindung der ursprünglichen Riemannschen Gedanken mit allen den Gesichtspunkten der Invariantentheorie, der Zahlentheorie und Algebra, der Gruppentheorie, der mehrdimensionalen Geometrie, sowohl auf dem Gebiete der Abelschen Funktionen als auch auf den eigensten Gebieten Kleins, den Modulfunktionen und den automorphen Funktionen gehört zu



seinen größten Erfolgen. Die zahllosen Arbeiten, die im Anschluß daran entstanden sind, beweisen, wie stark das Interesse war, das sie erweckten. Er hatte hier noch die besondere Genugtuung, die weittragenden und wichtigen Sätze, die er in den achtziger Jahren zum Teil auf intuitivem Wege gefunden, zu Beginn dieses Jahrhunderts bewiesen und weiter ausgestaltet zu sehen. Der Anteil Kleins an diesen Arbeiten ist ein sehr großer. Die meisten von ihnen hat er mit den Verfassern ins einzelne durchgesprochen, und bei den Korrekturen einen ausführlichen Briefwechsel mit ihnen geführt. Er hat seine Schüler nicht bloß in den Gegenstand, sondern auch in die Kunst der Disposition und die wissenschaftliche Ausdrucksweise überhaupt eingeführt. Das kam auch den „Mathematischen Annalen“ zugute, an deren Redaktion er seit 1873 in hervorragender Weise beteiligt war. Der Grundsatz, von dem er selbst sagte, daß die Redaktion der Annalen von Anfang an bewußt daran festgehalten habe, an keiner einzelnen Richtung innerhalb der mathematischen Wissenschaft einseitig festzuhalten, sondern allen Leistungen, welche neu und bedeutend scheinen, des Inlandes wie des Auslandes, bereitwilligst die Spalten der Zeitschrift zu öffnen, hat die Annalen zu einer der vornehmsten und unentbehrlichsten Quellen gemacht für jeden, der sich dieser Wissenschaft widmet. Bis etwa 1894 war so die Tätigkeit Kleins der Forschung, der Lehre und der mathematischen Literatur im engeren Sinne gewidmet. Nun aber tritt eine neue Seite seiner eigenartigen Begabung aus Licht: die Vertretung der Wissenschaft und ihrer Interessen nach außen hin. Diese Tätigkeit beginnt mit der Weltausstellung von Chicago, dem Evanston Colloquium und dem Vortrag über Riemann auf der Wiener Naturforscherversammlung 1894. Es folgt eine lange Reihe von Vorträgen über wissenschaftliche und Unterrichtsfragen, über das Verhältnis der Universität zur Technischen Hochschule, über das Verhältnis der Mathematik zu den Anwendungen und vieles andere, worüber ja auch Berufenere hier im Zusammenhang berichten. Insbesondere sei hier gleich auf die Tätigkeit Kleins in der internationalen Unterrichtskommission und den deutschen Ausschüssen für mathematischen Unterricht hingewiesen.

Aber zugleich damit tauchte ein Unternehmen auf, welches sich die Darstellung der gesamten Mathematik und ihrer Anwendungen vom Beginn des 19. Jahrhunderts an zum Ziel setzte, ein richtiges Säkularwerk, die Enzyklopädie. Ursprünglich von Burkhardt und F. Meyer als Wörterbuch geplant, wurde in den vorbereitenden Beratungen über Antrag Dycks jenes weitere Programm gestellt, mit dem Ziele, dadurch ein Gesamtbild der Stellung zu geben, die die Mathematik in der heutigen Kultur einnimmt. Hier war es Klein, der zusammen mit Dyck von allem Anfang an dem Unternehmen seine ganzen persön-

lichen Beziehungen, seine umfassenden wissenschaftlichen Interessen und großes Organisations-talent mit voller Hingebung widmete. Er selbst hat außer ausgedehnten vorbereitenden Arbeiten und eingehender Teilnahme an den einzelnen Bänden besonderes Verdienst durch die Durchführung und Vollendung des vierten, der Mechanik gewidmeten Bandes. Und wenn wir damit heute noch nicht zu Ende sind, so ist das zum guten Teil auch dem Umstand zuzuschreiben, daß durch das Erscheinen handlicher, bis auf die neueste Zeit fortgeführter Darstellungen der Einzelgebiete die jüngere Generation für ihre Arbeit eine feste Grundlage und eine mächtige Anregung zu neuer Forschung erhielt.

Und nun lassen Sie mich wieder zu den allgemeinen Betrachtungen der Einleitung zurückkehren. Klein hat uns, und damit noch vielen nach uns, die mannigfachen Spannungen und ihre Lösungen an mathematischen Problemen miterleben lassen und mit deren Mitteilung niemals gekargt. Das werden in erster Linie die Mathematiker zu würdigen wissen.

Aber auch als unentbehrliche Vorarbeit zur gedanklichen Erfassung eines physikalischen Weltbildes bewährt sich die Mathematik aufs neue, wenn die ordnenden Ideen der Gruppentheorie gerade jetzt wieder in der allgemeinen Relativitätstheorie, die ja geradezu ein invariantentheoretisches Problem ist, ihre Kraft bewahren und Klein selbst hier rüstig mitschafft.

Das geistige Machtmittel, welches die Wissenschaft gegenüber der Wirklichkeit gibt, hat er in vielen Anwendungen gefördert und zur Geltung gebracht. Die Enzyklopädie liefert dafür reichlich die Belege im einzelnen.

Noch weiter über den Kreis der Mathematiker hinaus greift aber die Wirkung der Mathematik in Unterricht und Erziehung. Gerade hier werden wir Kleins Arbeit zu verwerten und hoffentlich noch recht lange unter seiner eigenen Führung fortzusetzen haben, um immer wieder den Grundsatz zu vertreten, daß nur derjenige Mathematik mit Erfolg lehren kann, in dem die Wissenschaft selbst lebendig geworden ist, daß nur dieser dem Schüler als bleibendes Gut die Überzeugung mitgeben wird, daß das, was richtig gedacht ist, auch wahr und darum eine notwendige Grundlage für vernünftiges Wollen und Handeln ist.

### Klein und die nichteuklidische Geometrie<sup>1)</sup>.

Von Prof. Dr. A. Schoenflies. Frankfurt a. M.

Als Klein im Jahre 1871 seinen ersten epochemachenden Artikel über die nichteuklidische Geometrie veröffentlichte, stand er im jugendlichen

<sup>1)</sup> Von den Kleinschen Arbeiten kommen hauptsächlich in Betracht die in den Math. Ann. Bd. 4, S. 573, Bd. 6, S. 112, Bd. 37, S. 544, Bd. 50, S. 583

Alter von 22 Jahren. Für die mathematische Alltagswelt haftete einer Geometrie, in der das euklidische Parallelenaxiom nicht gelten sollte, immer noch eine Art paradoxen Beigeschmacks an. *Gauß* hatte seine ausgedehnten Resultate, wie wir aus einem Brief an *Bessel* wissen, bei seinen Lebzeiten völlig zurückgehalten; er scheute, schrieb er, das Geschrei der Böoter, wenn er seine Ansichten ganz aussprechen wolle. Die Lehrgebäude, die *Lobatschewsky* schon 1829 und bald darauf *Bolyai* errichtet hatten, waren infolgedessen zunächst ziemlich unbeachtet geblieben; selbst auf die bevorzugten Köpfe übten sie eine stärkere Wirkung erst aus, als die Gauß'schen Ideen aus seinem 1862 veröffentlichten Briefwechsel mit *Schumacher* bekannt wurden und allmählich das Schwergewicht des Gauß'schen Namens zu wirken begann. Aber doch galt alles Nichteuklidische für die große Masse der Mathematiker immer noch als etwas, was zwar durch seine merkwürdige Eigenart anzog, aber sozusagen jenseits der eigentlichen Mathematik existierte und ohne Beziehung zu realen Problemen war. Ein Wandel entstand erst, als *Riemann* und *Helmholtz* die Kraft ihres Genies an die Durchleuchtung der allgemeinen Grundlagen der Geometrie setzten, und man erfuhr, wie sie die nichteuklidischen Auffassungen in das Gesamtgebiet der Geometrie einordneten. Doch war bei beiden die mathematische Betrachtung noch ziemlich stark mit spekulativen Gedanken verwickelt. Dies erleichterte denen, die *Gauß* als Böoter gekennzeichnet hatte, die Angriffe und die Skepsis und erschwerte so einen durchgreifenden Umschlag. Es bedeutete daher einen wichtigen Schritt vorwärts, als *Beltrami*, nicht lange vor dem Eingreifen *Kleins*, in den Raumgebilden konstanter Krümmung die Träger eines greifbaren Bildes der nichteuklidischen Theoreme aufdeckte; indem er zeigte, daß deren geodätische Linien — kurzgesprochen — die nämliche Geometrie bestimmen, wie die Geraden der nichteuklidischen Räume. Immerhin blieb aber die Frage offen, ob es nicht einen Zirkelschluß bedeutet, wenn man mit Begriffen, die durchweg aus dem Euklidischen stammen, die Wahrheit und Folgerichtigkeit nichteuklidischer Lehren ableitete<sup>1)</sup>. Es ist eins der Hauptverdienste *Kleins*, daß er die reinliche Aussonderung der spezifisch mathematischen Probleme und ihre Befreiung von allem metaphysischen Beiwerk sowohl als notwendig, wie als möglich erkannt hat; er hat der nichteuklidischen Geometrie ein volles und unbestrittenes Bürgerrecht in der Mathematik erkämpft und sie zu

einem der reizvollsten und zugleich anwendungsreichsten Wissensgebiete erhoben.

Eine glänzende mathematische Phantasie mit dem sicheren Blick für das Erreichbare verbindend, von dem hohen Wert anschauungsmäßigen Erfassens geometrischer Wahrheiten erfüllt, zugleich stark physikalisch interessiert und daher im Rahmen der natürlichen Problemstellungen bleibend, niemals dogmatisch, sondern stets realistisch denkend, war *Klein* wie geschaffen, um im Bereich der nichteuklidischen Tatsachen und Zweifel klärend und reinigend zu wirken. Diesem seinem mathematischen Naturell folgend, war er sich von vornherein klar, daß es nicht Zweck der Mathematik war, eine Entscheidung philosophischer Fragen zu treffen. Sie hatte nur zu prüfen, ob das Parallelenaxiom eine Folge der übrigen Axiome ist oder nicht; die Frage nach seiner objektiven Geltung oder nach der Eigenart unseres empirischen Raumes konnte und sollte sie nicht vor ihr Forum ziehen. Zwar ist und war auch *Klein* philosophisch interessiert. Er hat sich über Ursprung und Wesen der Axiome öfters eingehend ausgesprochen, aber stets von dem Bewußtsein getragen, daß den Mathematiker als solchen die besondere Stellung, die er erkenntnistheoretisch einnehmen mag, ebensowenig beeinflussen dürfe, wie die Mathematik selbst. Der jugendliche Forscher erkannte daher seine wissenschaftliche Aufgabe ausschließlich darin, ein in sich consequentes Lehrgebäude jeder möglichen Geometrie aufzubauen, die axiomatischen Voraussetzungen, deren man dazu bedarf, mit aller Schärfe und Deutlichkeit herauszuschälen und sie in ihrer mathematischen Tragweite zu prüfen. Und er stand in dieser Weise nicht nur dem Parallelenaxiom gegenüber, sondern auch den sonstigen axiomatischen Voraussetzungen, und war bestrebt, sie eine nach der andern zum Ausdruck zu bringen. Er muß insofern als ein durchaus bewußter Vorgänger der allgemeinen axiomatisch-geometrischen Untersuchungsrichtung gelten<sup>2)</sup>, die ungefähr 10 Jahre später in voller Ausdehnung einsetzte; zuerst bei *Pasch* und dann später von *Hilbert* vervollkommenet und vollendet.

Die Eigenart des geistigen Schaffens, die wir am Kleinschen Genies bewundern dürfen, trug auf dem Gebiet der nichteuklidischen Probleme von vornherein den Stempel notwendigen Gelingens. Ich rechne dahin die immer allseitige und umfassende Problemstellung, die sichere Intuition für den inneren Zusammenhang scheinbar fremdster Einzelresultate, die leichteste Aneignung und Durchdringung der vorhandenen Literatur und ein glänzendes Geschick für ihre Vereinfachung und gleichzeitige Vertiefung, für ihre Vereinheitlichung und ihre Gestaltung zu einem plastischen Bilde. So stets im gegebenen wissenschaftlichen Boden wurzelnd, hat sein mathematisches Schaffen Erfolge von überraschender

sowie das Vorlesungsheft über nichteuklidische Geometrie vom Jahre 1893.

Über den allgemeinen historischen Werdegang vgl. man *Bonola*, Die nichteuklidische Geometrie, übers. v. *Liebmann*, Leipzig 1908.

1) Selbst *Cayley* meinte, trotz der v. Staudtschen Einführung des Zahlenraums sei wenigstens noch der Schein eines Zirkelschlusses vorhanden; *Collected papers* (1889) Bd. II, S. 605.

2) Den wesentlichsten Anstoß zu dieser Denkweise dürften *Riemann* und *Helmholtz* gegeben haben.

Fruchtbarkeit und Tragweite gezeitigt. Und wohl nirgends hat sich diese Eigenart erfolgreicher erwiesen, als in seinen nichteuklidischen Untersuchungen. Erst durch *Klein* ist nichteuklidisches Denken wissenschaftliches Gemeingut der Forschung geworden; weiten Gebieten des Schaffens und Fortschreitens hat er dadurch neues Blut und neues Leben eingeflößt.

Als *Klein* seine nichteuklidischen Studien begann, lag für die Geometrie der Lage ein Lehrgebäude in methodischer Vollkommenheit und fast lückenloser Schärfe und Beweiskraft bereits zwei Jahrzehnte hindurch vor: das Lehrgebäude, das *Chr. v. Staudt* mit der Vollkraft geometrischen Schauens errichtet hatte<sup>1)</sup>. Ebenso bestand seit über 10 Jahren eine allgemeine Theorie der Maßbestimmung, die Englands damaliger erster Mathematiker *A. Cayley* geschaffen hatte<sup>2)</sup>; eine Theorie, die sich auf formentheoretischer Grundlage erhebt und die gewöhnliche euklidische Maßbestimmung als Modell benutzt. Sie gipfelt in einem doppelten Resultat. Erstens erweisen sich die metrischen Eigenschaften einer Figur nicht als Eigenschaften, die ihr *an sich* zukommen, sondern vielmehr als projektive Beziehungen zu einem gewissen „absoluten“ Grundgebilde, und zweitens ordnen sich auf diese Weise die metrischen Eigenschaften in das umfassende Gebiet der allgemeinen projektiven Beziehungen ein. Beider Männer Geistesarbeit hatte aber den Jünger, der sie zu werten und zu meistern und harmonisch zu verbinden verstand, noch nicht gefunden. Ist doch der Teil der Staudtschen Schriften, der durch die Abstraktheit seiner Gedanken und Beweise dem Eindringen die meiste Schwierigkeit darbietet, nämlich die Theorie der Würfe und die Erörterung der imaginären Gebilde, erst nach *Klein*, und vielleicht sogar erst unter der Wirkung seiner Arbeiten, einem größeren Publikum erschlossen worden. Die geringe Ausbreitung der Cayleyschen Resultate ist weniger verständlich; aber auch *Cayleys* Vorgänger, *Laguerre*, hatte im wesentlichen ein gleiches Geschick getroffen<sup>3)</sup>. Anwendbarkeit und Tragweite ihrer Resultate mußten offenbar so lange in der Tiefe schlummern, bis sie durch *Kleins* intuitives Erfassen zum Leben und Wirken erweckt wurden. Jedenfalls ist *Cayley* selbst an der — man muß heute sagen offenkundigen — Beziehung seiner Resultate zum Nichteuklidischen vorbeigegangen. Sie lagen nicht auf seinem Wege. Für ihn handelte es sich nur darum, die tatsächliche geometrische Maßbestimmung auf der Graden und im Strahlbüschel, wie sie in der Ebene und auf der Kugel gilt, als Sonderfälle seines allgemeinen Ansatzes nachzuwei-

sen<sup>4)</sup>. Daß sich die drei Fälle möglicher Maßbestimmung, die in den drei Geometrien gelten, unmittelbar ergeben, wenn man das Cayleysche absolute Gebilde geeignet wählt, konnte erst jemand erkennen, bei dem der Blick für die Verwandtschaft mathematischer Gesetze so entwickelt war, wie bei *Klein*. Und diese Erkenntnis mußte um so stärker wirken, als doch klar war, daß man es hier nicht, wie bei der Beltramischen Deutung, mit einem unvollkommenen Abbild der nichteuklidischen Beziehungen zu tun hatte, sondern mit ihrem ureigensten inneren Wesen.

Für *Klein* ist es stets ein wissenschaftliches Gebot gewesen, die Darstellung geometrischer Dinge den anschaulichen Bedürfnissen anzupassen; er wußte, daß geometrische Wahrheiten ohne gleichzeitige Vorstellbarkeit nur unvollkommen verstanden werden. Der von *Cayley* eingeschlagene Weg, der direkt von den Koordinaten ausgeht, war daher für ihn nicht gangbar. Die Cayleysche Maßbestimmung mußte vielmehr in neuer und freier Weise auf projektiver Grundlage aufgebaut werden. Es gelang ihm, indem er dem algebraisch starren Gerüst der Cayleyschen Formentheorie die Beweglichkeit des projektiven Messens einflößte; sie führte ihn selbsttätig zu den linearen Transformationen und zu ihren Gruppen. Auch heute noch wird man die große Wirkung nachempfinden, die die Kleinschen Gedankengänge durch ihre Einfachheit, durch die Energie ihrer Gedanken und die ihnen innewohnende wissenschaftliche Überzeugungskraft auf die damalige mathematische Welt unzweifelhaft ausgeübt haben.

*Klein geht*, wie *Riemann*, von der natürlichen Frage aus, worin überhaupt das Messen besteht, und nach welchen Regeln es vor sich geht. Sieht man von den evidenten Gesetzen der Addierbarkeit der Strecken und Winkel ab<sup>5)</sup>, so setzt es in erster Linie die Herstellung eines Maßstabes voraus; d. h. also, die Erzeugung einer mathematischen Skala, die, von einer irgendwie gewählten Einheit ausgehend, zu allen Längen führt, die ein Vielfaches oder einen rationalen Teil der Einheit darstellen. Das Zweite ist die besondere Art der Benutzung des Maßstabes; sie ruht darauf, daß die Skala  $\infty$  in sich verschiebbar sein muß, wie dies einem Maßstab eigen ist; eine Bewegung, die einen Skalenteil in einen andern überführt, muß dies für jeden Skalenteil leisten, während sie alles, was „unendlich fern“ ist, naturgemäß festläßt. Gemäß der Cayleyschen Grundanschauung ist aber die Metrik eine Beziehung projektiver Art zu einem gewissen absoluten und invarianten Gebilde. Jede der eben genannten Bewegungen des Maßstabes erweist sich daher als eine eindeutige

<sup>1)</sup> Geometrie der Lage, und Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1847 und Erlangen 1856/57.

<sup>2)</sup> A sixth Memoir upon quantities; Philos. Transactions, Bd. 149 (1860), S. 82.

<sup>3)</sup> Von *Laguerre* stammt die Definition des Winkels mittels des Doppelverhältnisses der Schenkel gegen die Strahlen nach den Kreispunkten; Nouv. Ann. de math. Bd. 12, (1853), S. 64.

<sup>4)</sup> *Cayley* erkannte insbesondere, daß sein absoluter Kegelschnitt, der in der Ebene in ein Punktepaar zerfällt, auf der Kugel ein Kreis ist, und zwar ein imaginärer, und daß dies die Ursache der vollen Dualität der sphärischen Geometrie ist (a. a. O. S. 89). Ob *Cayley* die Arbeit von *Laguerre* kannte, vermag ich nicht zu sagen.

<sup>5)</sup> Es ist  $\overline{12} + \overline{23} = \overline{13}$ ,  $\overline{12} + \overline{21} = 0$  usw.

und projektive, also lineare Transformation, und zwar als eine, bei der einerseits die unendlich-fernen Elemente, andererseits auch die Elemente des absoluten Gebildes fest bleiben; diese Elemente stellen daher sowohl die Doppelerlemente der linearen Transformation wie auch die Elemente von *Cayleys* absolutem Gebilde dar. Damit war die Kette der Argumente geschlossen, und die Einordnung der Cayleyschen Metrik in die projektive Geometrie erreicht. Wählt man als absolutes Gebilde insbesondere zwei reelle, zwei imaginäre, oder zwei zusammenfallende Elemente — womit alle Möglichkeiten erschöpft sind —, so erstehen die Maßbestimmungen mit zwei reellen unendlich-fernen Elementen, zwei imaginären, oder einem reellen; also die Lobatschewskysche Geometrie, die euklidische, und endlich diejenige, auf die *Riemann* zuerst hingewiesen hat, und bei der die Gerade eine endliche Länge besitzt. Sie ist in demjenigen Elementargebilde realisiert, das der Geraden dualistisch gegenübersteht, nämlich im Strahlenbüschel; die Gesamtheit aller Winkel besitzt den Wert  $2\pi$ , und ihr absolutes Gebilde wird von den nach den imaginären Kreispunkten zielenden Strahlen gebildet.

Eine lineare Transformation ist nur in einem Zahlenraum ausführbar. Mit *Riemann* und *Helmholtz* von vornherein den geometrischen Konstruktionsraum als Zahlenraum einzuführen, war für den Erbauer eines geometrischen Gebäudes nicht zugänglich. Aber der Meister aller projektiven Baukunst, *Chr. v. Staudt*, hatte ja, wie oben erwähnt, den Bau bereits im wesentlichen errichtet und die Umwandlung des geometrischen Raumes in den Zahlenraum gelehrt. Auf die Fundamente des Baues und die Art seiner Aufmauerung näher einzugehen, kann unterbleiben. Es genüge der Hinweis, daß *Klein* von vornherein die Lücken erkannte, die noch zu verkitten waren, und auch über den Kitt, der die Festigkeit des Baues verbürgte, nicht im Zweifel war. Um zweierlei handelte es sich. Die Staudtsche Darstellung ruhte auf dem Parallelenaxiom und mußte deshalb von dieser ihrer Grundlage befreit werden. Es gelingt, indem man alle Konstruktionen zunächst in einem endlichen Raumteil vornimmt, den man dann zu erweitern, und falls nötig, durch ideale (uneigentliche) Elemente zu ergänzen hat<sup>1)</sup>; was ja schließlich im euklidischen Raum durch Hinzufügung der unendlichfernen Elemente in ganz analoger Weise geschieht. Freilich entsteht dabei zunächst die Schwierigkeit, daß ein Grundelement, wie die Gerade, dem begrenzten Raumteil, in dem man operiert, nicht völlig angehört, und daß daher die Konstruktionen und Beweise, die zur Bestimmung des vierten harmonischen Punktes nötig sind, in ihm illusorisch werden können. Da aber in jedem Raumteil vollständige Grundgebilde erster und höherer Stufe, nämlich Büschel und Bündel

vorhanden sind, so lassen sich die Staudtschen Konstruktionen und Beweisegänge zunächst für sie durchführen und dann auf die unbegrenzten Grundgebilde, mittels Hinzunahme der idealen Elemente übertragen<sup>1)</sup>. *Klein* zeigt dies sogar in der Weise, daß er nicht mit Geraden und Ebenen, sondern allgemeiner mit Kurven und Flächen operiert, die den für den projektiven Aufbau grundlegenden Axiomen des Schneidens und Verbindens und der Anordnung genügen. Die zweite notwendige Ergänzung des Staudtschen Lehrganges bestand in der axiomatischen Einführung der geometrischen Stetigkeit und ihrer Beziehung zur Irrationalzahl<sup>2)</sup>. Heute, wo uns der Gegensatz zwischen der abzählbaren Menge und dem Kontinuum so geläufig ist, wie das Einmaleins, ist es ja evident, daß ein konstruktives Verfahren, das mit einer endlichen Zahl von Grundpunkten beginnt, nur eine abzählbare Menge von Konstruktionspunkten liefern kann, und daß daher jeder Beweis des Fundamentalsatzes, der nicht durch ein Axiom über die Abzählbarkeit hinausführt, versagen muß. *Klein* hat hierzu in seinem zweiten Artikel zuerst des näheren Stellung genommen; indem er die Forderung aufstellt, daß jede auf einem Grundelement erster Stufe vorhandene Reihe unendlich vieler konstruktiver Punkte ein Grenzelement bestimmen soll, das dem Gebilde angehört und zugleich alle axiomatischen Eigenschaften der Konstruktionspunkte besitzt<sup>3)</sup>. Damit war die Stetigkeit des Raumes auf projektiver Grundlage für das damalige mathematische Denken in der gleichen Weise eingeführt, wie die Irrationalzahl von *Cantor* und *Dedekind*. Genau genommen muß man freilich auch noch das archimedische Axiom voraussetzen, dessen Einführung und Bedeutung man erst in späterer Zeit zu würdigen gelernt hat<sup>4)</sup>. Nachdem sodann noch im Anschluß an *Kleins* Arbeiten der Beweis geführt war, daß die Staudtschen Konstruktionspunkte das Elementargebilde überall dicht bedecken, war der Beweis des Fundamentalsatzes einwandfrei erledigt. *Klein* selbst hat dafür später noch eine eigene Darstellung gegeben, um auch hier dem Bedürfnis nach einfacher und anschaulicher Erfassung möglichst gerecht zu werden. Sie lehnt sich an die analogen Verhältnisse der Modulfigur an und ruht darauf, daß jede lineare Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten einer endlichen Zahl einfachster Substitutio-

<sup>1)</sup> Hierauf wies schon der erste Artikel hin; Bd. 4, S. 623. Eine ausführliche Darstellung gab später *F. Schur*, Math. Ann. Bd. 39, S. 113.

<sup>2)</sup> Die oben erwähnte Schrift von *Bonola* hat auch die vielen elementaren Beweise der Winkelsumme daraufhin geprüft, inwiefern sie die Stetigkeit und das Axiom des Archimedes benutzen.

<sup>3)</sup> Bd. 6, S. 140. In aller Kürze wird die Frage auch schon in Bd. 4, S. 582, gestreift.

<sup>4)</sup> Vgl. das Kleinsche Gutachten zur ersten Verteilung des Lobatschewskypreises, abgedruckt in Math. Ann. Bd. 50, S. 594. *Dehn* hat später den Einfluß des Axioms auf den Satz über die Winkelsumme erörtert. Math. Ann. 53, S. 405.

<sup>1)</sup> Ein Hinweis auf solche idealen Elemente findet sich bereits bei *Beltrami*, Giorn. di mat. Bd. 5 (1867), S. 299.

nen äquivalent ist, für die der Beweis unmittelbare geometrische Durchsichtigkeit besitzt.

Der analytischen Behandlung der so mit Stetigkeit ausgestatteten projektiven Elementargebilde erster und höherer Stufe stand nun nichts mehr im Wege. Die erste Aufgabe war, die oben genannte Skala wirklich zu konstruieren; da sie grundlegend ist, setze ich die einfache Art, in der Klein zu ihr und zum Wert des Abstandes gelangte, hierher. Wählt man auf dem Gebilde erster Stufe (also der Geraden oder dem Strahlbüschel) die Fundamentelemente der linearen Substitution als Elemente  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  homogener Koordinaten und setzt  $x_1/x_2 = z$ , so sind  $z = 0$  und  $z = \infty$  die Fundamentelemente, und die lineare Substitution hat die Gleichung

$$z' = \lambda z.$$

Ihre wiederholte Anwendung liefert aus jedem Element  $z_1$  die unbegrenzte Reihe konsekutiver Elemente

$$z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1, \dots, \lambda^n z_1, \dots$$

und es hat das Element, dem der Zahlenwert  $\lambda^n z_1$  entspricht, von  $z_1$  den ganzzahligen Abstand  $n$ . Analog ergibt sich, falls  $\alpha$  eine rationale Zahl ist, als Abstand des Elementes  $\lambda^\alpha z_1$  von  $z_1$  der Wert  $\alpha$ , und gemäß dem Stetigkeitsaxiom gilt dies nun auch für irrationales  $\alpha$ . Damit ist eine dem Kontinuum entsprechende lückenlose Skala hergestellt. Als Entfernung irgend zweier Punkte  $z$  und  $z'$  folgt noch (durch Vergleich ihrer Abstände von  $z_1$ ) der Wert

$$\log z'/z : \log \lambda = c \log z'/z.$$

Der Quotient  $z'/z$  ist aber das Doppelverhältnis der Elemente  $z'$  und  $z$  mit den Fundamentelementen  $z = 0$  und  $z = \infty$ , und das Cayleysche Resultat ist gewonnen, und sogar in verallgemeinerter Form. Als Maßunterschied zweier Elemente eines Grundgebildes erster Stufe ergibt sich der mit einer Konstanten multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, das sie mit dem absoluten Gebilde bestimmen. Die Verallgemeinerung, die in der Konstanten  $c$  liegt, ist von wesentlicher Bedeutung; sie erst ermöglichte die große Ausdehnbarkeit der nichteuklidischen Denkweise. Ein reelles  $c$  liefert die Metrik mit zwei unendlichfernen Elementen, wie sie für die Gerade der Lobatschewskyschen Geometrie gilt; ein imaginäres  $c$  die ohne unendlichferne Elemente, die im Strahlbüschel und Ebenenbüschel jeder Geometrie gilt. Die Metrik mit einem unendlichfernen Element ergibt sich für unendlich großes  $c$ ; es bedarf dann noch eines geeigneten Grenzüberganges, um die Formel in die euklidische Abstandsformel überzuführen. Die drei so sich ergebenden Fälle hat Klein als *hyperbolische*, *elliptische* und *parabolische* Geometrie bezeichnet.

Die große Bedeutung dieses Tatbestandes besteht darin, daß mit ihm auch die Grundlagen für die nichteuklidische Geometrie der Gebiete höherer Stufe bereits geschaffen waren; es bedurfte nur der Ausführung im einzelnen. In der Ebene hat man einen Kegelschnitt  $C_2$ , im

Bündel einen Kegel  $K_2$ , im Raum eine Fläche  $F_2$  als absolutes Gebilde zugrunde zu legen. Für jede Gerade  $g$  liefern dann ihre Schnittpunkte mit dem  $C_2$  oder der  $F_2$  das absolute Gebilde der auf ihr herrschenden Maßbestimmung; ebenso stellt der Schnitt einer Ebene  $\epsilon$  mit der  $F_2$  den absoluten  $C_2$  für diese Ebene, der von einem Punkt  $P$  an die  $F_2$  gelegte Tangentialkegel den absoluten  $K_2$  für das um  $P$  herumgelegte Bündel dar usw. Einer Bestimmung bedurfte noch das Gebiet der eigentlichen Punkte. Es ist dadurch festgelegt, daß die Maßbestimmung im Büschel und Bündel in allen drei Geometrien elliptischer Natur ist; ein Punkt ist also als eigentlicher nur dann zulässig, wenn das Paar der von ihm an den  $C_2$  gelegten Tangenten oder der an die  $F_2$  gelegte Tangentialkegel imaginär ist. Endlich ist noch einigen natürlichen Forderungen Rechnung zu tragen. An sich führt jede Wahl der Konstanten  $c$  sowie jede Wahl der quadratischen Form  $\Omega$ , die gleich Null gesetzt, das absolute Gebilde darstellt, zu einer formal möglichen Geometrie. Man wird sie aber nur dann als praktisch zulässig ansehen, wenn sie bei geeigneter Wahl der Konstanten  $c$  gewisse Realitätsforderungen erfüllt; z. B. daß reellen und zugleich eigentlichen Punkten ein reeller Abstandsunterschied zukommt, daß der Maßunterschied zweier reellen voneinander verschiedenen Elemente nicht Null ist usw. Von dieser Forderung aus ergaben sich, genau wie bei Riemann, für jeden  $R_n$  immer nur drei mögliche Typen von Geometrien; die hyperbolische, die elliptische und die parabolische. Die nullteiligen und die ovalen  $F_2$  liefern die elliptische und die hyperbolische Geometrie, und die Ausartung der  $F_2$  in einen doppelt zu zählenden  $C_2$  die parabolische. Ist dieser  $C_2$  insbesondere der imaginäre Kugelkreis, so wird die parabolische Geometrie zur euklidischen.

Die Tragweite dieses einfachen Sachverhalts war zunächst die, daß von ihm aus viele Einzelsätze der nichteuklidischen Geometrien als Folgerungen von fast unmittelbarer Evidenz erschienen. Vor allem aber schlang er um Resultate, bei denen vorher gerade ihr gegensätzlicher Charakter als bemerkenswert erschienen war, das einigende Band und ließ sie als Ausdrücke einer und derselben geometrischen Gesetzmäßigkeit erkennen. Zu den Zeiten von Gauß hatte sich noch jeder einzelne Bearbeiter nichteuklidischer Probleme seinen eigenen Weg gebahnt; damals war es nur das Genie eines Gauß gewesen, das die Einzelergebnisse in die innere Beziehung zu setzen vermochte, die ihnen zukam. Selbst Beltrami hat noch zum Riemannschen Raum positiven Krümmungsmaßes einen etwas engen Standpunkt eingenommen<sup>1)</sup>. Es ist auch verständlich, daß die im Euklidischen befangene Anschauung, der die Phantasie fehlte, aus ihm projektiv herauszutreten, zu den einfachen Vorstellungsbildern der nichteuklidischen Metrik nicht gelangen

1) Vgl. S. 293.

konnte. Alles dies hat sich mit dem Erscheinen von Kleins Arbeiten von Grund aus geändert; sie vermochten hier in gleicher Weise den Sondercharakter der Einzelresultate abzustreifen, wie es die projektive Methode lange vorher im Bereich der gewöhnlichen Geometrie getan hatte. Einige Beispiele mögen dies darlegen. Man braucht nur einen Strahlenbüschel mit einer Geraden oder ein Strahlenbündel mit einer Ebene zu schneiden, und auf sie die elliptische Geometrie des Büschels oder Bündels sozusagen perspektiv zu übertragen, um auf der Geraden und der Ebene in unmittelbar anschaulicher Form ein Bild der elliptischen Metrik zu gewinnen; insbesondere liefert noch der Schnitt der Ebene mit dem absoluten  $K_2$  des Bündels den absoluten  $C_2$  der ebenen Maßbestimmung. Da die oben genannte Realitätsforderung für die Konstante  $c$  im hyperbolischen Fall einen reellen, im elliptischen einen rein imaginären Wert bedingt, so wurde die im elementaren Lehrgebäude höchstens äußerlich verständliche Tatsache, daß die hyperbolische Trigonometrie aus der sphärischen durch den Übergang von einem reellen zu einem imaginären Kugelradius entspringt, mit einem Schlage durchsichtig. Ein weiteres Beispiel bildeten alle Sätze, die Kreise und Kugeln sowie ihre Ausartungen betreffen. Kreise stellen sich in allen drei Geometrien als solche Kurven zweiter Ordnung dar, die mit dem absoluten  $C_2$  zwei Tangenten gemein haben, Kugeln als solche Flächen zweiter Ordnung, die die absolute  $F_2$  längs eines ebenen Schnitts berühren. Ebenso durchsichtig wurde die Eigenart der Grenzlinien und Grenzflächen der hyperbolischen Geometrie sowie auch die Tatsache, daß die Maßbestimmung auf ihnen parabolischen Charakter haben muß. Ist sie doch für jeden Kreis und jede Kugel derjenigen perspektiv zugeordnet, die in dem Mittelpunkt herrscht, und diese geht, wenn der Mittelpunkt ins Unendliche rückt, in die parabolische über.

Eine grundlegende Bedeutung kam noch der Frage nach den nichteuklidischen Bewegungen zu. Und das um so mehr, als Helmholtz gezeigt hatte, daß man sich auch von den Bewegungen und ihren Eigenschaften aus einen gangbaren Weg zu den nichteuklidischen Theorien bahnen kann. Kleins projektiver Ausgangspunkt lieferte auch in diesem Punkt eine übersichtliche und einheitliche Antwort. Daß als Bewegungen nur gewisse projektive Transformationen der Ebene oder des Raumes in Betracht kommen konnten, war evident. Im übrigen mußte das euklidische Verhalten wieder als Modell benutzt werden, und die Ideen des Erlanger Programms mußten die Richtlinien der Untersuchung abgeben. Die Aufgabe, die sich diesem Programm gemäß einstellte, war die, die Gruppen projektiver Transformationen zu finden, die in jedem einzelnen Fall die gruppentheoretische Grundlage der Metrik darstellen. Der Tatbestand für die euklidische Metrik, von dem auszugehen war, ist andererseits

der folgende: Die metrischen Eigenschaften sind kovariante Beziehungen zu den absoluten Gebilden; als Operationen, für die die Kovarianz stattfindet, kommen die Bewegungen und Umlegungen in Betracht; solcher gibt es für die Ebene  $\infty^3$ , für den Raum  $\infty^6$ , und jede dieser Bewegungen und Umlegungen führt das zugehörige absolute Gebilde, also Kreispunkte und Kugelkreis in sich über. Die projektiven Transformationen, die in den nichteuklidischen Fällen an die Stelle dieser Bewegungen und Umlegungen treten, müssen das absolute Gebilde gleichfalls in sich überführen. Solcher gibt es für einen  $C_2$  ebenfalls  $\infty^3$ , und für eine  $F_2$  ebenfalls  $\infty^6$ , und damit waren sie bereits als die entsprechenden nichteuklidischen Gruppen für Ebene und Raum erkannt. In bezug auf sie stellt also jede nichteuklidische metrische Eigenschaft eine kovariante Beziehung zum absoluten Gebilde dar.

Es galt jetzt nur noch, von den Operationen, die die absoluten Gebilde in sich überführen, zu den zugehörigen Bewegungen und Umlegungen für die ganze Ebene, den Bündel und den Raum, zu gelangen. Für Ebene und Bündel war die Lösung unmittelbar gegeben. Jede projektive Transformation, die den absoluten  $C_2$  einer Ebene in sich überführt, läßt zwei seiner Punkte,  $P'$  und  $P''$  fest; damit auch ihre Tangenten und deren Schnittpunkt  $O$ . Ist der  $C_2$  reell, so liegt, wie im Euklidischen, eine Bewegung oder Umlegung vor, je nachdem jeder der beiden Punkte  $P'$  und  $P''$  für sich fest bleibt, oder beide sich gegenseitig vertauschen<sup>1)</sup>. Die ebene Bewegung erscheint also unter dem Bilde einer Drehung um den Punkt  $O$ ; in Verallgemeinerung des euklidischen Hauptsatzes der Kinematik. Jeder Punkt bewegt sich auf dem Kreise, der den absoluten  $C_2$  in  $P'$  und  $P''$  berührt.

Von besonderer Eleganz ist die Lösung des Problems in dem Fall, daß eine nullteilige  $F_2$  das absolute Gebilde darstellt, die Metrik also von elliptischem Charakter ist. Es ist die Geometrie, die Cliffords phantasievoller Fläche vom Krümmungsmaß Null das Leben gab; und diese Fläche ist es auch, für die Klein seine Ideen gestaltete. Er knüpft dazu an die auf jeder  $F_2$  vorhandenen Geradenscharen an. Freilich sind sie auf einer nullteiligen Fläche imaginär; aber sie sind es in einer Weise, die gerade mit ihnen als Hilfsmittel zu den reellen Bewegungen der  $F_2$  und des Raumes führt. Sie dürfen deshalb eine nähere Ausführung beanspruchen. Sieht man zunächst von den Realitätsverhältnissen ab, so ist klar, daß diese Geraden bei jeder der  $\infty^6$  Kollineationen, die die  $F_2$  fest lassen, ebenfalls in sich übergehen, und zwar entweder jede Schar für sich, oder wechselweise beide ineinander. Sind  $\lambda$  und  $\mu$  die Parameter beider Geradenscharen, so entsprechen

<sup>1)</sup> Im elliptischen Fall kann man Umlegungen und Bewegungen nicht unterscheiden. Hierauf wies Study hin; Math. Ann. 39, S. 501.

die Bewegungen insbesondere denjenigen Substitutionen, die in den Gleichungen

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \quad \mu' = \frac{\alpha_1\mu + \beta_1}{\gamma_1\mu + \delta_1}$$

ihren Ausdruck finden; ihr einfachster Typus ist offenbar derjenige, der *nur*  $\lambda$  oder *nur*  $\mu$  transformiert. Wird nur  $\lambda$  transformiert, so geht jede  $\mu$ -Gerade in sich über; die  $\lambda$ -Geraden vertauschen sich untereinander, aber so, daß zwei von ihnen,  $l_1$  und  $l_2$ , fest bleiben, und zwar Punkt für Punkt. Die  $\mu$ -Geraden erscheinen also als Strahlen einer gewissen Kongruenz, die die Geraden  $l_1$  und  $l_2$  als Leitlinien besitzt, und es bewegt sich jede  $\mu$ -Gerade in sich. Damit ist auch bereits die allgemeine Bewegung des Raumes ersichtlich, die dieser Bewegung der  $F_2$  in sich entspricht; sie kann nur eine solche sein, bei der jeder Strahl der eben genannten Kongruenz in sich gleitet. Die zugehörige projektive Transformation ist also eine windschiefe Perspektive. *Klein* bezeichnet sie als *Schiebung*. Alle Punkte rücken auf ihren  $\mu$ -Strahlen um das nämliche Stück  $\varphi$  fort, und ebenso dreht sich zugleich jede Ebene um den in ihr liegenden  $\mu$ -Strahl um diesen Winkel  $\varphi$ ; der Sinn dieser Drehung ist bei den  $\lambda$ -Strahlen und  $\mu$ -Strahlen ein entgegengesetzter. Dies führt noch zu der eigenartigen Folgerung, daß man die Schiebungen als nichteuklidische Schraubungen auffassen kann, für die jeder der  $\infty^2$  Kongruenzstrahlen eine Schraubenaxe darstellt.

Der Reiz dieser einfachen Lösung besteht nun insbesondere darin, daß die so eingeführten Schiebungen bei den nullteiligen Flächen reell ausfallen. Bei ihnen besteht nämlich jede Geradenschar in Kleinscher Ausdrucksweise aus hochimaginären Geraden, da sie ja einen reellen Punkt nicht enthalten können; doch so, daß in der einzelnen Schar zu jeder Geraden auch ihre konjugiert imaginäre auftritt. Dies bewirkt, daß die Geraden  $l_1$  und  $l_2$  ebenfalls konjugiert imaginär sind. Damit ist aber die zugehörige Kongruenz, also auch die ihr entsprechende Schiebung als eine reelle erkannt; und es folgt weiter noch, daß von den beiden  $\lambda$ - und  $\mu$ -Schiebungen die eine rechtsgewunden, die andere linksgewunden ist.

Es ist heute nicht ganz leicht, den außerordentlichen Eindruck abzuschätzen, den *Kleins* Aufsätze aus den Annalenbänden 4 und 6 ausgelöst haben mögen. Die Zahl der an sie unmittelbar anknüpfenden Arbeiten ist freilich keine große; hatte er doch die Einzelfolgerungen für Ebene und Raum in der Hauptsache schon selbst gezogen. Von jüngeren Gelehrten, die sich sofort von seinen Ideen fesseln ließen, und seine Resultate weiterführten, nenne ich besonders *Lindemann*<sup>1)</sup> und *d'Ovidio*<sup>2)</sup>. Beide dehnten alsbald die nichteuklidischen Maßbegriffe auf den Linien-

raum aus auf der Grundlage, die schon im Erlanger Programm enthalten war. *Lindemann* stellte außerdem die Kinematik und die Kräftelehre auf nichteuklidischer Grundlage dar und zeigte, wie die von *Chasles*, *Poinsot* und *Möbius* gefundenen Sätze über unendlichkleine Bewegungen sich sinngemäß nichteuklidisch übertragen. Seine Resultate fesseln insbesondere dadurch, daß im Nichteuklidischen auch für die Metrik eine volle Dualität für Abstand und Winkel besteht. Translation und Rotation sind hier völlig gleichwertig; eine Translation ist zugleich eine Rotation um ihre Polare bezüglich der absoluten  $F_2$  und umgekehrt. Die analoge Dualität gilt in der nichteuklidischen Statik für Einzelkraft und Kräftepaar<sup>3)</sup>. In den letzten Jahrzehnten hat die projektive Auffassung des Nichteuklidischen auch auf die Lösung von Einzelproblemen vielfach fördernd eingewirkt. Die Hauptwirkung der Kleinschen Arbeiten besteht aber darin, daß sie allmählich das ganze nichteuklidische Denken mit projektivem Geist erfüllten; ebenso haben umgekehrt die nichteuklidischen Gedankenkreise befruchtend auf die projektiven Probleme eingewirkt. Seit geraumer Zeit ist nichteuklidisches und projektives Denken zu einer untrennbaren Einheit verschmolzen. Probleme von großer Tragweite und Fruchtbarkeit sind in den letzten Jahrzehnten in diesem Sinne erdacht und gelöst worden; es mag genügen, an die sehr allgemeinen und weittragenden Resultate zu erinnern, die *Study* über den Linienraum und seine nichteuklidischen Eigenschaften gewonnen hat. Sie sind durchaus aus der von *Klein* gestreuten Saat erwachsen.

Einige Einzelfragen, die *Klein* selbst in den Kreis seiner Betrachtung gezogen hat, mögen hier noch zu kürzerer Erörterung gelangen:

1. Ein großer Erfolg des Kleinschen Ansatzes war die volle Einordnung der Riemannschen Gedankengänge in den Rahmen des projektiven Schließens. Den Riemannschen Ausgangspunkt bildet der Zahlenraum und die definite quadratische Differentialform, die das Linienelement bestimmt. Da bei *Klein* gleichfalls eine quadratische Form  $\Omega$  als fundamentales Gebilde zugrunde liegt, so springt die analytische Gleichartigkeit des Ausgangspunktes sofort in die Augen. Die Aufgabe war also nur, den Weg zu finden, der die innere Übereinstimmung der Problemstellung ins Licht setzen konnte. *Klein* erschuf dazu den Begriff der Berührung zweier Maßbestimmungen. Liegt nämlich irgendeine allgemeine Maßbestimmung vor, so kann man eine parabolische so wählen, daß sie in der Umgebung eines Punktes  $P$  mit der um ihn herum herrschenden infinitesimal übereinstimmt, und diese Umgebung ist um so größer, je größer der Wert der Konstanten  $c$  ist. Dies Verhältnis beider

<sup>1)</sup> Math. Ann. Bd. 7 (1873) S. 56.

<sup>2)</sup> Ann. di Mat. (2) Bd. 6 (1873), S. 72, und Math. Ann. 12 (1877) S. 403. Hier werden die Maßfunktionen des nichteuklidischen  $R_n$  eingehender erörtert.

<sup>3)</sup> Einige Anwendungen auf die Dynamik gab *Klein* selbst in seinen autographierten Vorlesungen.

Maßbestimmungen nennt *Klein* eine Berührung und die Stärke der Abweichung der allgemeinen von der speziellen ihre *Krümmung*. Bedeutung und Berechtigung dieser Begriffe — und das ist naturgemäß das Entscheidende — beruhen aber darauf, daß als Maß der Krümmung genau der Ausdruck des Gaußschen Krümmungsmaßes eingeführt werden konnte. Ein jeder  $R_n$  kann also, je nachdem man in ihm eine hyperbolische, elliptische oder parabolische Maßgeometrie zugrunde legt, als Mannigfaltigkeit von konstantem negativem, positivem oder verschwindendem Krümmungsmaß angesehen werden. Damit war zunächst einmal der Anschluß an die Riemannsche Auffassung auf projektiver Grundlage erreicht. Dieses Ergebnis enthielt bereits *Kleins* erster Artikel. Den zweiten Schritt, die volle Verschmelzung des Riemannschen Ausgangspunktes mit dem projektiven, brachte das Erlanger Programm. Er stützt sich auf die gruppentheoretische Deutung, deren *Beltrami*s Arbeiten über die geodätischen Linien der  $\mathcal{M}_n$  konstanter Krümmung fähig waren. *Beltrami* hatte zweierlei gezeigt. Erstens sind diese geodätischen Linien bei geeigneter Wahl der Koordinaten durch lineare Gleichungen darstellbar, und zweitens finden Bewegungen dieser  $\mathcal{M}_n$  in sich in linearen Transformationen dieser Koordinaten ihren analytischen Ausdruck. Damit war die Gruppe, die die metrische Geometrie der Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung stützt, als eine Untergruppe der Gesamtgruppe aller linearen Transformationen erkannt, und damit einer Untergruppe der projektiven Gesamtgruppe ähnlich. Da ferner die Cayleysche Maßbestimmung, wie oben erwähnt, als Maßbestimmung in einem Raum konstanter Krümmung gedeutet werden kann, so muß diese Untergruppe auch die nämliche sein, die Cayleys projektiver Auffassung der Metrik zugrunde liegt.

2. *Beltrami*s Sätze über die geodätischen Linien auf den Flächen konstanter Krümmung  $\mathcal{K}$  ließen diese Linien als gleichwertig mit den Geraden der Ebene erscheinen. Dies hatte aber in einem wichtigen Punkt versagt. Auf der Kugel schneiden sich größte Kreise in zwei Punkten; ferner laufen durch zwei diametrale Punkte unendlich viele von ihnen; *Beltrami* schien es daher nötig, für die elliptische Geometrie Ausnahmen von den Axiomen des Schneidens und Verbindens zuzulassen. Dies hat die richtige Auffassung längere Zeit behindert. Das Fehlen der geodätischen Parallelen auf den Flächen  $\mathcal{K} > 0$  veranlaßte *Beltrami* sogar, diese Flächen als Objekte geringeren Interesses anzusehen. Da es in jeder Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_n$  vom Krümmungsmaß  $\mathcal{K} < 0$  geodätische Kugeln ( $\mathcal{M}_{n-1}$ ) von positivem  $\mathcal{K}$  gab, so meinte er, die Geometrie der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{K} > 0$  sei in der Geometrie derer für  $\mathcal{K} < 0$  enthalten und bedürfe deshalb keiner eigenen Untersuchung. Das war nach *Riemann*, aber vor *Klein*. Aber der Über-

gang vom Beltramischen Bilde zur Sache selbst deckte sofort die Quelle des Irrtums auf. Der Bündel, als Ort seiner Ebenen und Strahlen, und zwar der ungerichteten Vollstrahlen, stellt das eigentliche elliptische Grundgebilde zweiter Stufe dar; in ihm ist die Geltung der Axiome des Schneidens und Verbindens ausnahmslos realisiert. Der Fehler des Beltramischen Bildes entstand dadurch, daß die Beziehung zwischen den durch das Kugelzentrum laufenden Bündelstrahlen und den Kugelpunkten eine einzweideutige ist; um ein eineindeutiges Bild zu erhalten, darf man also nur die Halbkugel verwenden. *Klein* hat den Sachverhalt auch noch auf andere Weise zu veranschaulichen gewußt; er wies darauf hin, daß hier dieselben Unterschiede obwalten, wie bei den einseitigen und zweiseitigen Flächen. Die Kugel ist eine zweiseitige Fläche, die projektive Ebene dagegen, die in dieser Hinsicht dem Bündel — als sein eineindeutiges projektives Abbild — gleichwertig ist, eine einseitige; und das gleiche gilt von der hyperbolischen Ebene. Man kann aber beide in eine kugelartige zweiseitige Fläche übergehen lassen, indem man sie aus einem doppelten Blatt bestehen läßt, und dann beide Blätter durch Aufbauschen voneinander trennt, während sie längs des zugehörigen  $C_2$  verbunden bleiben.

3. Der Riemannsche Ausspruch, daß die Unbegrenztheit des Raumes seine Unendlichkeit nicht nach sich zieht, hatte alsbald seine große Wirkung auf das mathematische Denken ausgeübt; seine natürliche Würdigung fand aber auch er erst, als die projektive Auffassung der Dinge das Verständnis für ihn erschloß, und den Büschel und den Bündel als einfachste elliptische Raumformen hinstellte. Nachdem es erschlossen war, wurde die elliptische Geometrie gerade diejenige, die erhöhten Reiz auszuüben vermochte; durch die volle Harmonie ihres geometrischen Verhaltens, die die Dualität nicht nur für die Sätze des Schneidens und Verbindens, sondern auch für die Metrik im Gefolge hat. Dieser Reiz war es sicher auch, der *Clifford* zu seiner berühmten Fläche führte, die er *Klein* 1873 vorführte, und für die er *Klein* mit der gleichen Wärme zu erfüllen wußte, die ihn selbst beseelte. Die Hauptleistung von *Clifford* war die, daß er dem Begriff paralleler Geraden auch in der elliptischen Geometrie eine Existenz schuf und damit die Lücke ausfüllte, die *Beltrami* als einen ihrer Mängel empfunden hatte. Er behielt vom euklidischen Parallelismus die Eigenschaft bei, die metrischer Natur war; nämlich die, daß jeder Punkt der einen Parallelen von der anderen gleichen Abstand besitzt. Diese Parallelen genügten auch dem Satz, daß eine Gerade, die zwei von ihnen trifft, gleiche Winkel mit ihnen bildet. Mit ihnen hat er seine phantasievoll erdachte Fläche erschaffen. Sie ist vom Krümmungsmaß Null; auf ihr gilt die ebene Geometrie für ein begrenztes Parallelogramm in der Weise, daß



man seine Gegenseiten als identisch anzusehen hat.

Cliffords früher Tod hat eine eingehende Darstellung seiner Resultate verhindert. Das ausführliche Werk von Killing über die nichteuklidischen Raumformen, das 1885 erschien, hatte die Fläche nicht erwähnt, und dies veranlaßte Klein, alsbald eine eigene Erörterung der Fläche zu geben. Er gelangt zu ihr mittels der Schiebungen, die oben als die einfachsten Bewegungen des elliptischen Raumes auftraten. Die ihnen entsprechenden Kongruenzstrahlen sind die Cliffordschen Parallelen. Im hyperbolischen Fall sind sie imaginär, im elliptischen dagegen reell, und das bedingt ihre Verwendbarkeit gerade für den Fall, daß das absolute Gebilde eine nullteilige Fläche  $F_2$  ist. Die Cliffordsche Fläche ist eine Regelfläche  $\Phi_2$ , die mit  $F_2$  ein windschiefes Vierseit gemein hat; jede ihrer beiden Geradenscharen besteht aus Cliffordschen Parallelen der einen und der andern Art. Die Fläche gestattet daher beide Arten von Schiebungen; bei jeder Schiebung sind die einen Erzeugenden die Bahnkurven und die andern vertauschen sich unter sich. Jedes auf ihr gelegene Vierseit spielt daher völlig die Rolle eines ebenen Parallelogramms. Die Zerlegbarkeit in lauter unendlichkleine Parallelogramme von konstantem Winkel  $\varphi$  und gleichem Flächeninhalt ergibt unmittelbar, da die Gesamtlänge der Geraden den Wert  $\pi$  hat, für ihren Gesamthalt den endlichen Wert  $\pi^2 \cos \varphi$ .

Von der phantasievollen Eigenart der Cliffordschen Fläche strahlte auch sonst noch erhellendes Licht aus. Es erscheint verständlich, daß man die Flächen von konstantem  $\mathfrak{K}$  zunächst als einfache geschlossene Mannigfaltigkeiten betrachtete und meinte, die Beweglichkeit der auf ihnen vorhandenen Figuren über die Fläche hin führe auch die Flächen als Ganzes in sich über. Beides hat sich als Irrtum erwiesen. Die Cliffordsche Fläche geht als Ganzes nur durch die  $\infty^2$  möglichen Schiebungen in sich über; andere Bewegungen in sich gestattet sie nicht; insbesondere zeigt der Umstand, daß ihre von einem Punkt auslaufenden geodätischen Linien teils geschlossen, teils ungeschlossen sind, daß keine Drehung um einen ihrer Punkte möglich ist. Dagegen läßt sich jedes Parallelogramm, wie überhaupt jede begrenzte Figur, auf  $\infty^3$  Arten auf ihr verschieben. Den inneren Grund bilden ihre Zusammenhangsverhältnisse. Will man eine Zylinderfläche auf die Gesamtebene abwickeln, so muß man sie mit unendlich vielen Blättern bedecken; jedem Blatt entspricht in der Ebene ein Parallelstreifen. Ganz Analoges gilt für die Cliffordsche Fläche. Aus ihrer Endlichkeit folgerte schon Clifford, daß sie, längs zweier von demselben Punkt ausgehender Erzeugenden aufgeschnitten, einfach berandet und einfach zusammenhängend wird und auf ein Rhombus abgewickelt werden kann. Das unendliche Netz, das aus diesem Rhombus in der Ebene entsteht, ist dann ein Bild

der mit unendlich vielen Blättern bedeckten Fläche, und alle diese Blätter gehen wie beim Zylinder glatt ineinander über. Die Eigenart des elliptischen Raums besteht aber darin, daß das Zurücklaufen der Fläche in sich hier auf verschiedene Art möglich ist. Weiter kann man aber auch das Rhombus in gewohnter Weise zu einer Ringfläche zusammenbiegen und erhält damit eine neue Veranschaulichung der Zusammenhängeverhältnisse.

Damit war von selbst ein neues Problem entstanden; man hatte die nichteuklidischen singularitätenfreien Raumformen auf ihren Zusammenhang zu untersuchen. Für die Flächen  $\mathfrak{K} > 0$  hatte schon Killing ein hierhergehöriges Resultat abgeleitet. Reelle Arten — denn nur auf solche kommt es an — gibt es nur zwei; sie finden im Bündel und in der Kugel ihre einfachsten Vertreter und entsprechen, wie schon erwähnt wurde, der einseitigen und zweiseitigen Flächengattung. Als mögliche zweidimensionale Raumformen  $\mathfrak{K} = 0$  erkannte Klein außer den oben genannten zweiseitigen Flächen, nämlich der aus der Cliffordschen Fläche entstehenden Ringfläche und der Zylinderfläche, nur noch eine einseitige; man kann eine Ringfläche nämlich so deformieren, daß sie diese Doppelfläche beiderseits überzieht. Raumformen  $\mathfrak{K} < 0$  existieren dagegen unendlich viele. Ringfläche und Zylinderfläche entstehen aus dem Parallelogramm und dem Parallelstreifen der euklidischen Ebene durch Zusammenbiegung und damit aus solchen Flächenstücken, die den Fundamentalbereich der doppelt und einfach periodischen Funktionen bilden. Andere Möglichkeiten werden durch die geforderte Zusammenbiegung ausgeschlossen. Ganz analog entstehen die Raumformen  $\mathfrak{K} < 0$  aus entsprechenden Polygonen der hyperbolischen Ebene, also aus solchen Teilungen der hyperbolischen Ebene in kongruente Polygone, die durch unendlich viele hyperbolische Bewegungen in sich übergehen, und damit den Fundamentalbereich einer reell automorphen Funktion abgeben. Kleins Problemstellung hatte noch den Erfolg, Killing zur Weiterführung seiner Untersuchungen anzuregen<sup>1)</sup>. Er fand, daß es in jedem  $R_n$  für  $\mathfrak{K} > 0$  und für gerades  $n$  immer nur die zwei Raumformen gibt, die für  $n = 2$  in der Kugel (dem sphärischen Raum) und im Bündel verkörpert sind. Für ungerades  $n$  gibt es dagegen noch weitere solche Raumformen.

4. Die Beziehung des Nichteuklidischen zu den automorphen Funktionen hat sich im vorstehenden bereits eingestellt. Klein hat auf diese Zusammenhänge als Quelle fördernder Erkenntnis stets mit Wärme und Nachdruck hingewiesen. Freilich handelt es sich hier in erster Linie um eine Geometrisierung analytischer Dinge. Jegliche Geometrisierung dient aber nicht nur der allseitigen Durchleuchtung eines Problems und der Erkenntnis seines Zu-

<sup>1)</sup> Math. Ann. 39 (1891) S. 257.

sammenhangs mit den geometrischen Fragen; sie bietet oft den Vorteil, dem Lernenden eine bequeme Eingangspforte zu öffnen, und kann auch vertiefend, problemzerlegend und erfolgfördernd wirken. Und so ist es im Gebiet der automorphen Funktionen vielfach gewesen. Ihre nahe Beziehung zur Geometrie *Lobatschewskys* hatte auch *Poincaré* in seinen ersten Arbeiten schon gestreift<sup>1)</sup>. Das Erlanger Programm zeigt aber, daß *Klein* schon im Beginn seiner Forschartigkeit die geometrische Deutung der linearen Substitutionen einer komplexen Variablen auf der Kugel bewußt und vollwertig erfaßt hatte; er erkannte in ihnen sowohl die Kugeldrehungen, wie auch allgemeiner — was sich bei dem projektiven Charakter dieser Dinge direkt ergab — die Ausdrücke der nichteuklidischen Bewegungen, die die Kugel in sich überführen<sup>2)</sup>. Jede Teilung der Kugel in Bereiche, die bei einer Gruppe von solchen Bewegungen in sich übergehen, liefert daher eine automorphe Funktion. Die von *Fricke* gegebene Aufzählung der möglichen Fundamentaltbereiche im Falle einer endlichen Anzahl erzeugender Operationen ist als ein besonderer Erfolg der Kleinschen Ideen anzusehen. Als Ergebnis von besonderem Interesse sei noch erwähnt, wie die einzelnen Gattungen automorpher Funktionen den verschiedenen Maßbestimmungen entsprechen, die man zugrunde legt. Dazu muß daran erinnert werden, daß eine Maßbestimmung auf einer  $F_2$  nur so möglich ist, daß man sie als Teil einer räumlichen Maßbestimmung einführt, und zwar in der Weise, daß eine Ebene des Raumes und ihr Pol  $P$  bezüglich der  $F_2$  festbleibt; die im Bündel um  $P$  vorhandene Maßbestimmung überträgt sich dann perspektiv auf die Fläche. Je nachdem man nun den Punkt  $P$  außerhalb, auf oder innerhalb der Kugel wählt, wird die auf ihr entstehende Maßbestimmung hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch. Der elliptische Fall führt auf die Gruppen der regelmäßigen Körper. Der parabolische Fall führt zu den doppelt- und einfach-periodischen Funktionen, und der hyperbolische auf die eigentlich automorphen. Die einfachste Wahl der Ebene ist in diesem Fall die, daß man sie eine Durchmesserebene sein läßt; das aus ihrem Pol  $P \infty$  strahlende orthogonale Parallelstrahlenbündel erzeugt dann auf der Kugel die Orthogonalkreise des Äquators, und deren Projektionen auf die Äquatorebene liefern die Teilungen der reell automorphen Funktionen. Um zu den allgemeinsten automorphen Funktionen zu gelangen, hat man zu der hyperbolischen Maßbestimmung des Gesamtraumes überzugehen, die durch die Teilungen der Kugeloberfläche bedingt ist.

5. Endlich sei erwähnt, daß *Klein* auch die

Relativitätstheorie mit nichteuklidischen Auffassungen in Beziehung gesetzt hat<sup>1)</sup>. Geht man von den rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  und  $t$  aus und schreibt in homogener Form

$$x = x_1/x_5, \quad y = x_2/x_5, \quad z = x_3/x_5, \quad t = x_4/x_5,$$

so daß  $x_5 = 0$  das „Unendlichferne“ der Raumwelt darstellt, so hängen neue und alte Mechanik mit den zwei ausgearteten quadratischen Formen  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$  und  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2/c^2 = 0$  zusammen, die in Punktkoordinaten durch die Gleichungen

$$I. \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0,$$

$$II. \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \quad x_5 = 0$$

dargestellt sind. Ihre Invariantentheorie und die Bestimmung der Gruppe der linearen Transformationen, die die Gleichungen I und II und zugleich die Maßunterschiede unverändert lassen, ist dann kurzgesprochen die gruppentheoretische Grundlage der alten und der neuen Mechanik. Die Bestimmung dieser Gruppen liefert in der Tat das physikalisch geforderte Ergebnis und damit die Einordnung der klassischen und der modernen Mechanik in das Schema der projektiven Maßbestimmung für die vierdimensionale Raumwelt.

Bald 50 Jahre sind vergangen, seitdem die Welt die Einwirkung von *Kleins* nichteuklidischen Ideen an sich erfahren hat. Eine neue Generation in Wissenschaft und Schule ist seitdem herangewachsen. Die Wissenschaft hat sich allmählich ganz mit dem Gehalt dieser Ideen erfüllt; aber auch Lehrerschaft und Schule haben inzwischen seines Geistes einen Hauch verspürt. Angriffe, wie sie vor einigen Jahrzehnten von seiten einzelner Kreise gegen die mathematische „Afterweisheit“ gerichtet wurden, sind heute verstummt. Daß sehen kann, wer sehen mag, bedarf keiner Bekräftigung; wichtiger ist und erfreulicher für die Wissenschaft, wie für *Klein* selbst, daß die große Mehrzahl derer, die dazu berufen sind, auch sehen wollen. Dem ruhigen Beschauer, der an den Sieg der Vernunft glaubt, die in den Dingen steckt, kann der fortschreitende Entwicklungsgang nicht zweifelhaft sein. Möge dieses Bewußtsein dem Lebensabend dessen, der sein ganzes Leben hindurch auch für Reform und Hebung des Unterrichts fördernd und klärend eingetreten ist, einer seiner freundlichen Begleiter sein.

### Die Bedeutung des Erlanger Programms.

Von Prof. Dr. C. Carathéodory, Berlin.

1. Das 19. Jahrhundert kann in gewissen Hinsicht als das Jahrhundert der Geometrie bezeichnet werden, weil sich damals die reine Geometrie,

<sup>1)</sup> Acta math. Bd. 1, S. 8 (1882) und Bd. 3 (1883) S. 56.

<sup>2)</sup> Aus dem Gaußschen Nachlaß weiß man jetzt, daß die Formel für die Drehungen ihm wohlbekannt war; Werke, Bd. 8, S. 355.

<sup>1)</sup> Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 19 (1910), S. 281. Vgl. auch noch eine neuere Bemerkung in Bd. 27, Abteilung 2, S. 43, die an den Gedanken anschließt, die Raumwelt als Mannigfaltigkeit  $R > 0$  zugrunde zu legen.

die mehrere Generationen vernachlässigt worden war, plötzlich zur höchsten Blüte entfaltet. Die Bewegung geht von *Monge* aus und hängt mit der französischen Revolution zusammen, die nicht nur diesen Geometer von dem Zwange befreite, die darstellend-geometrischen Methoden, die er schon längst ersonnen hatte, als militärisches Geheimnis zu hüten, sondern auch die *Ecole Polytechnique* gründete, aus der — trotz ihres praktischen Zweckes — so viele Mathematiker ersten Ranges hervorgegangen sind.

Die Früchte des vielseitigen Unterrichts von *Monge* ließen nicht auf sich warten; wir verdanken einerseits seinem Einflusse die allmähliche Entwicklung des Dualitätsprinzips und die projektive Geometrie, die *Poncelet* in den Jahren der Kriegsgefangenschaft an der Wolga nach dem unglücklichen russischen Feldzuge Napoleons geschaffen hat, während andererseits das Buch von *Monge* selbst „*Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*“ (1795) die Grundlage zur späteren Flächentheorie bildete.

Die Pflege der Geometrie verbreitete sich mit großer Schnelligkeit über ganz Europa, vor allem in Deutschland, wo *Möbius* (1827), *Plücker* (ca. 1834), *Steiner* (ca. 1833), *v. Staudt* (1847), *Kummer*, um nur diese zu nennen, in kurzer Aufeinanderfolge die projektiven Koordinaten, die synthetische Geometrie, die Liniengeometrie, die Kreis- und Kugelgeometrie, die Theorie der algebraischen Flächen und noch anderes mehr entweder begründet oder in hohem Maße gefördert haben.

Eine zweite, von der ersten unabhängige Welle geht von *Gauß* aus, der in seiner Arbeit „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*“ (1827) die eigentliche Flächentheorie begründet hat. Diese Arbeit bildet außerdem die Grundlage zu den Untersuchungen von *Riemann* (1854, 1861) über die Krümmung der Räume, die heute in der Einsteinschen Gravitationstheorie eine so große Rolle spielen.

Im Jahre 1829 wurde ferner von *Lobatschewsky* und kurz darauf (1832) von *J. Bolyai* die nicht-Euklidische Geometrie entdeckt und, indem die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen geometrischen Axiomen allen Mathematikern klar wurde, ein Problem gelöst, das seit dem Altertum berühmt war<sup>1)</sup>. *Gauß* und besonders *Riemann*, der in den schon erwähnten Arbeiten eine zweite Art nicht-Euklidischer Geometrie entdeckte, sind in diesem Zusammenhange auch zu nennen.

Als vierten Hauptpunkt muß man die Quaternionentheorie *Hamiltons* (1843) nennen, die eine Invariantentheorie der Bewegungen des Euklidischen Raumes enthält, und die Aus-

<sup>1)</sup> Ein lückenloser Beweis dieser Unabhängigkeit ist erst viel später erfolgt, wohl zuerst durch die Untersuchungen von *Beltrami* über Flächen konstanter Krümmung (1869) und vor allem durch die weiter unten erwähnten Arbeiten von *Klein*.

dehnungslehre *Graßmanns* (1844, 1865), in der zum ersten Male die Geometrie der mehrdimensionalen Räume begründet wird.

In den Jahren 1850—1870 entwickelten sich außerdem die algebraischen Methoden der Invariantentheorie, die man als den eigentlichen Schlüssel der modernen analytischen Geometrie ansehen muß, unter den Händen von *Cayley*, *Sylvester*, *Aronhold*, *Clebsch* und vielen anderen und bildeten allmählich eine umfangreiche Disziplin.

Endlich kann man die Analysis Situs nicht unerwähnt lassen, d. h. denjenigen Teil der Geometrie, der den Zusammenhang der geometrischen Figuren unabhängig von ihrer Gestalt erforscht, und der im Keime schon bei *Euler* zu finden ist, aber erst durch die Arbeiten von *Listring* (1847), *Möbius* (1863) und vor allem durch die funktionentheoretischen Gedanken *Riemanns* (1851, 1857) eine Wissenschaft für sich geworden ist.

2. Am Anfang der siebziger Jahre hatte sich also die Geometrie nach so vielen, scheinbar einander ganz fremden Richtungen entwickelt, daß es schien, sie könnte in mehrere getrennte Zweige zerfallen, um so mehr, als die Spezialisten sich vielfach bemühten, überall zwischen den verschiedenen Gebieten trennende Mauern zu errichten.

Um so berechtigteres Aufsehen erweckte der Aufsatz von *F. Klein* „*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*“, der zuerst als Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät zu Erlangen im Jahre 1872 erschien<sup>1)</sup>, und in dem auf dem einfachsten Wege, fast spielend, ein gemeinsames Band um sämtliche Arten von Geometrien geschlungen wurde und noch dazu zum ersten Male die Frage „*Was ist eine Geometrie?*“ zugleich gestellt und beantwortet wird.

Diesen großen Erfolg verdankte *Klein* dem glücklichen Gedanken, die Idee der *Gruppe* an die Spitze seiner Überlegungen zu stellen. Der abstrakte Begriff einer Gruppe ist verhältnismäßig neueren Datums<sup>2)</sup>. Er wurde durch

<sup>1)</sup> Wiedergedruckt in den *Mathematischen Annalen* Bd. 43 p. 63 (1893), außerdem in italienischer und französischer Übersetzung in den *Annali di Matematica* (2) t. 17 (1890), *Annales de l'Ecole Normale* (3) t. 8 (1891).

<sup>2)</sup> *Eine Gesamtheit von geometrischen Operationen bildet eine Gruppe, wenn sie alle Operationen enthält, die entstehen, wenn man zwei beliebige unter den gegebenen Operationen hintereinander ausführt, und wenn sie zugleich mit jeder Operation auch ihre Inverse enthält.*

Man macht sich mit dem Begriff der Gruppe am besten durch möglichst einfache Beispiele vertraut. Betrachten wir z. B. Drehungen um einen Punkt der Ebene; die zwei Drehungen um  $90^\circ$  und  $180^\circ$  bilden keine Gruppe, weil man, wenn man sie hintereinander ausführt, eine dritte, von den beiden ersten verschiedene, Drehung um  $270^\circ$  erhält. Dagegen bilden die vier Drehungen um  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$  eine Gruppe. Die beiden Drehungen um  $90^\circ$  und  $270^\circ$  sind jede zu der anderen invers; wenn man sie nacheinander ausführt, kehrt nämlich jeder Punkt in seine ursprüngliche Lage zurück, sie ergeben bei Zusammensetzung

Lagrange (1770) und vor allem Galois (1832) bei ihren Untersuchungen über algebraische Gleichungen geprägt, und erst später, z. B. durch C. Jordan (1868), auch auf das geometrische Gebiet übertragen. Man kann andererseits aber wohl sagen, daß jeder Geometer, von Euklid ab, der die Bewegungsgruppe des Raumes am Anfang seines ersten Buches wiederholt benutzt, in seinem Unterbewußtsein mit der einen oder anderen Gruppe operiert hat. Dies ist z. B. bei Möbius in hohem Maße der Fall gewesen.

Für Klein aber ist die Gruppe nicht bloß ein Instrument, um neue Sätze zu finden, sondern sie bildet das wahre Wesen der Geometrie. Eine Geometrie entsteht erst, wenn man neben der räumlich ausgedehnten Mannigfaltigkeit noch eine Gruppe von Transformationen dieser Mannigfaltigkeit in sich vorgibt; und jeder Gruppe entspricht eine besondere Geometrie.

So wurde mit einem Schlage der Unterschied klar, der zwischen den verschiedenen Geometrien, die sich sozusagen zufällig entwickelt hatten, besteht, und zugleich ein Mittel gegeben, um alle möglichen Geometrien systematisch aufzustellen und zu untersuchen. Genau so, wie wenn die Sonne durch die Wolken bricht und alle Gegenstände einer weiten Landschaft plötzlich beleuchtet, wurden viele Beziehungen sichtbar, die zwischen den verschiedenen Theorien bestehen und bis dahin mit wenigen Ausnahmen unbemerkt geblieben waren. Es ist nicht möglich, den Gedanken von Klein knapper und besser darzustellen und ihn mit vielseitigeren Beispielen zu beleben, als er es selbst in seiner Abhandlung getan hat. Man muß die Schrift selbst lesen, die heute, nach fast fünfzig Jahren, ebenso fesselnd und frisch wirkt, wie am ersten Tage ihres Erscheinens.

Klein war nur dreiundzwanzig Jahre alt, als er die „Vergleichenden Betrachtungen“ veröffentlichte; aber er hatte schon Gelegenheit gehabt, mit den meisten unter den besten Geometern seiner Zeit in Berührung zu kommen. Er war

die Drehung um  $0^\circ$ , die Identität. Ebenso sind die Drehungen um  $0^\circ$  und  $180^\circ$  sich selbst invers. Ähnlich sieht man, daß die Gesamtheit aller möglichen Drehungen um einen festen Punkt der Ebene eine Gruppe bilden. Die zuerst betrachtete Gruppe, die nur aus einem Teil der Operationen der zweiten Gruppe besteht, nennt man eine Untergruppe dieser.

Die Translationen der Ebene (oder des Raumes) bilden ebenfalls eine Gruppe, weil zwei Translationen hintereinander ausgeführt wiederum eine Translation ergeben. Die Inverse einer beliebigen Translation ist wieder eine Translation, welche dieselbe Richtung, denselben Betrag und den entgegengesetzten Sinn hat.

Ich erwähne noch einige geometrische Gruppen: die Gesamtheit der Bewegungen des Raumes, die eine Ebene, oder eine gerade Linie, oder eine Schraubenlinie, oder eine Kugel, oder einen der fünf regulären Körper mit sich zur Deckung bringen. Die Gesamtheit der Transformationen der Ebene, die gerade Linien in gerade Linien überführen, oder die — wie die Transformation durch reziproke Radien — jeden Kreis und jede Gerade entweder in einen Kreis oder in eine gerade Linie transformiert.

in Bonn Assistent von Plücker gewesen, hatte in Göttingen intim mit Clebsch verkehrt und war in der Zwischenzeit im Winter 1870 mit seinem Jugendfreunde S. Lie in Paris gewesen, wo er C. Jordan kennen lernte und ganz besonders mit G. Darboux lebhaft Beziehungen anknüpfte, die der damalige Krieg nur für kurze Zeit unterbrach. So kam es, daß er trotz seiner Jugend in der Lage war, das Erlanger Programm zu verfassen, ein Programm im wahren Sinne des Wortes, das von seinem Autor einen vollständigen Überblick über die gesamte Geometrie seiner Zeit erforderte.

Im Erlanger Programm ist zum erstenmal eine Tendenz zutage getreten, die später für alle Arbeiten Kleins maßgebend geworden ist, und die darin bestand, den Zusammenhang entfernt liegender Gebiete aufzudecken und auf diese Weise neue fruchtbare Forschungsmöglichkeiten zu schaffen. Dadurch hat Klein mehr als irgend ein anderer im Gebiete der Mathematik dazu beigetragen, die Gefahren der durch eine zu große Spezialisierung hervorgerufenen Zersplitterung der Wissenschaft zu überwinden.

Auch war es kein reiner Zufall, daß Klein in seiner Schrift dem Begriff der Gruppe eine so maßgebende Rolle zuschrieb. Hatte er doch schon sehr früh im wechselseitigen Verkehr mit Lie die fundamentale Bedeutung der Gruppentheorie für die gesamte Mathematik eingesehen, eine Überzeugung, die während des Pariser Aufenthaltes der beiden Freunde nur bekräftigt werden konnte, da auch dort z. B. C. Jordan die letzte Hand an sein „Traité des Substitutions“ legte, das erste Lehrbuch über die Theorie endlicher Gruppen.

3. Das Erlanger Programm enthält aber noch mehr als diesen einen Hauptgedanken, durch den die Bedeutung der Gruppe für die Geometrie festgelegt worden ist. Plücker hatte nämlich gelehrt, wie man nicht nur die Punkte, sondern beliebige algebraische Gebilde durch endlich viele „Koordinaten“ charakterisieren und daher als Elemente des Raumes auffassen kann.

Eine Gruppe von Transformationen des Raumes kann aber auch, wie Klein bemerkte, als Gruppe von Transformationen solcher algebraischen Figuren unter sich angesehen werden und erzeugt daher nach Kleins Prinzip eine bestimmte Geometrie dieser Figuren. Nun kann es vorkommen, daß mehrere auf diese Weise gebildete Geometrien dieselbe Gruppe besitzen und daher selbst übereinstimmen.

Hierdurch wurde auf die bereits bekannten Übertragungsprinzipien, insbesondere auf den vor kurzem durch Lie entdeckten Zusammenhang zwischen Linien- und Kugelgeometrie ein neues Licht geworfen und zugleich für die Aufstellung neuer Übertragungsprinzipien eine einheitliche Grundlage geschaffen. Von diesem Gedanken, der sich auch später in vielen Arbeiten von jüngeren

Geometern als fruchtbar erwiesen hat, hat *Klein* eine Reihe von wichtigen Anwendungen gemacht.

Die Art z. B., wie er die nicht-Euklidische Geometrie, zum Teil schon vor dem Erlanger Programm, behandelt hat, beruht auf diesem Abbildungsprinzip. *Klein* hat gefunden, daß man das Innere einer Kugel als Lobatschewskyschen nicht-Euklidischen Raum deuten kann, wenn man die Gruppe derjenigen projektiven Transformationen des Raumes, die die Kugel in sich transformieren, den Betrachtungen zugrunde legt. Ähnlich hat er den elliptischen nicht-Euklidischen Raum mit Hilfe einer imaginären Kugel realisiert.

Noch bekannter ist die Figur, in der die nicht-Euklidische Ebene durch eine Halbebene dargestellt wird, wobei das Bild der geraden Linien Halbkreise sind, die den Rand der Halbebene senkrecht schneiden und die Winkel in ihrer gewöhnlichen Bedeutung erhalten bleiben. Diese Figur spielt ja in der Theorie der automorphen Funktionen eine große Rolle, der *Klein* viele seiner wichtigsten und schönsten Arbeiten gewidmet hat und die — wenigstens durch die subjektive Weiterentwicklung der Gedanken *Kleins* — mit dem Erlanger Programm zusammenhängen und deshalb hier auch erwähnt sein mögen.

4. Später hat *Klein* wiederholt betont, daß die Ideen des Erlanger Programms auch als oberstes Einteilungsprinzip für die Mechanik genommen werden müssen. Zunächst hat er gezeigt, wie man die Mechanik des starren Körpers von diesem Standpunkte aus behandeln kann<sup>1)</sup>. Dann aber hat die Relativitätstheorie und die neue Einsteinsche Gravitationstheorie ihm neuen Anlaß gegeben, die fundamentale Rolle, welche gerade hier die Gruppe, ganz im Sinne seines Erlanger Programms spielt, zu untersuchen<sup>2)</sup>.

In der klassischen Mechanik muß man nämlich die zehngliedrige Gruppe zugrunde legen, die man erhält, wenn man die gleichförmigen Translationen des Raumes (3 Parameter), die orthogonalen Transformationen des Koordinatenkreuzes (6 Parameter) und die Ersetzung der Zeit  $t$  durch  $(t+h)$  miteinander kombiniert. In der Elektrizitätstheorie dagegen (und überhaupt bei allen Erscheinungen, bei denen die Lichtgeschwindigkeit als endlich angesehen wird) muß man diese Gruppe, die man die Galileische genannt hat, durch die Gruppe der Lorentztransformationen ersetzen, die ebenfalls zehnparametrig ist und aus

<sup>1)</sup> Zur Schraubentheorie von Sir *Robert Ball* (Ztschr. f. Mathem. u. Phys. Bd. 47 (1902); Wiederabdruck mit einem Zusatz i. d. Math. Ann. Bd. 62 (1906, S. 419).

<sup>2)</sup> Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe (Jahresber. d. deutsch. Mathematikervereingung Bd. 19, 1910).

Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie (Gött. Nachr. 1918).

Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt (Gött. Nachr. 1918).

der man die erste durch einen Grenzprozeß gewinnen kann. In der Einsteinschen Gravitationstheorie wieder sind es die reellen eindeutigen Transformationen der vierdimensionalen Welt, die man betrachten muß<sup>3)</sup>.

Hieraus sieht man, wie sich der ursprüngliche Geltungsbereich der Kleinschen Ideen erweitert hat durch das Hinzukommen von Fragestellungen, die zur Zeit ihres Entstehens noch gar nicht existierten und für welche die Wissenschaft nicht einmal reif war, und das ist gerade ein Prüfstein für die Tragweite des Fortschritts, der durch das Erlanger Programm erzielt worden ist.

## Klein, Riemann und die mathematische Physik.

Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Sommerfeld,  
München.

Als ich Oktober 1893 nach Göttingen kam, war die erste Vorlesung, die ich bei *Klein* hörte, eine solche über die Riemannsche  $P$ -Funktion. Wie alle Vorlesungen von *Klein*, war sie glänzend durchgearbeitet und von plastischem Vortrag. *Klein* konnte, was nur wenige Dozenten wagen dürfen, die Zusammenfassung des Vorgetragenen seinen Hörern mehrmals in jeder Stunde in die Feder diktieren, ohne den Anschein der Pedanterie hervorzurufen und ohne sich zu wiederholen. Er konnte dies, weil seine Zusammenfassung dem Gedanken stets eine neue zugespitzte Form gab. Dem Gedanken, nicht der Rechnung. Die Rechnung spielt in *Kleins* Vorlesungen eine ganz nebensächliche Rolle. Das war einer der Punkte, in denen er sich mit *Riemanns* Denkweise berührte. Die Definition der Funktionen aus ihren Eigenschaften, unabhängig von ihrer formalen Darstellung, die Formel nicht als Grundlage, sondern als Ausfluß der mathematischen Erkenntnis! Wir lernten in jener Vorlesung diesen Geist der Riemannschen und Kleinschen Funktionentheorie an dem Beispiel der hypergeometrischen Funktion kennen. Das hinreißende Temperament von *Klein*, das wohl in seiner rheinischen Heimat wurzelt, verstand es, diesen Geist der Mathematik uns vor Augen zu stellen und damit *Riemanns* Geist neu zu beleben.

*Klein* hat auf der Wiener Naturforscher-Gesellschaft 1894, als er nach dem Tode von *Helmholtz* an dessen Stelle als Vortragender der Allgemeinen Sitzung sprach, das Thema gewählt: Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik. Hier leitet er die besondere Kraft der Riemannschen Methode aus ihrer Durchtränkung mit der Denkweise der mathematischen Physik her. „Wie die einzelne Erscheinung im Gebiete der Physik von der Anordnung der Versuchsbedingungen abhängt, so indi-

<sup>3)</sup> Das letzte ist nicht ganz genau, weil im Unendlichen Nebenbedingungen hinzukommen, die noch nicht vollständig erforscht sind.

vidualisiert *Riemann* seine Funktionen durch die besonderen Grenzbedingungen, die er ihnen auferlegt.“ „Was in der Physik die Verbannung der Fernwirkungen, die Erklärung der Erscheinungen durch die inneren Kräfte eines raumerfüllenden Äthers ist, das ist in der Mathematik das Verständnis der Funktionen aus ihrem Verhalten im Unendlich-Kleinen, insbesondere aus den Differentialgleichungen, denen sie genügen.“ „Riemann im Gebiete der Mathematik und Faraday im Gebiete der Physik stehen parallel.“

Am unmittelbarsten kommt *Riemanns* mathematisch-physikalische Richtung zum Ausdruck in seiner Dissertation (1851) über die Grundlegung der Funktionentheorie. Sie ist eine Potentialtheorie in zwei Dimensionen; der Greensche Satz bildet die natürliche reelle Vorstufe zum Cauchyschen Satz. Die Riemannschen Differentialbedingungen zwischen dem reellen und imaginären Teil der komplexen Funktion sind Bedingungen für die wirbelfreie Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Was *Riemann* hier zum Teil nur verhüllt ausgesprochen hat, zog *Klein* 1881 in seiner Vorlesung und Schrift „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale“ sowie in seiner daran anschließenden, weiter ausgeführten autographierten Vorlesung über Riemannsche Flächen ans Licht. Die Idee der Riemannschen Fläche, die *Riemann* in seiner Dissertation einführt und durch eine Andeutung am Schlusse derselben erweitert, bildet *Klein* zur Vorstellung der geschlossenen „Klein-Riemannschen Fläche“ aus. So wie die komplexe Ebene funktionentheoretisch am besten durch die Kugel ersetzt wird, läßt sich eine verzweigte Riemannsche Ebene von höherem Geschlecht ersetzen durch eine geschlossene singularitätenfreie räumliche Fläche von mehrfachem Zusammenhange. Diese Fläche wird gleichmäßig mit leitender Masse belegt gedacht und bildet einen Konduktor für elektrische Strömung. Die auf der Fläche eindeutigen Potentiale bilden die Bausteine für die Theorie der algebraischen Funktionen der Fläche und ihrer Integrale. Die Unstetigkeitspunkte der Potentiale sind die Quellen und Senken der Strömung; es sind zugleich die Punkte, in denen die Elektroden als Stromzu- und -abführung an den Konduktor gelegt zu denken sind. Indem man unendlich viele Elektroden transversal längs eines Rückkehrschnittes der Fläche aneinander reiht, erhält man als Potentiale die überall endlichen Integrale der Fläche (Integrale der ersten Gattung). Integrale zweiter und dritter Gattung ergeben sich bei punktförmigen zusammenfallenden oder getrennten Elektroden; die auf der Fläche eindeutigen Funktionen, die algebraischen Funktionen des Gebildes, werden als Sonderfall aus den Potentialfunktionen aufgebaut.

Es ist nicht eigentlich mathematische Physik, was hier getrieben wird, sondern physikalische Mathematik. Nicht die Mathematik steht im

Dienste physikalischer Interessen und Probleme, sondern die Physik leitet und beflügelt den mathematischen Gedanken. Daß die Physik hierzu befähigt und berufen sei, hat *Klein* seinen Schülern oft und eindringlich eingeprägt.

Die Riemannsche Dissertation war seinen mathematischen Zeitgenossen zunächst fremdartig; sie wurde wohl gelegentlich das Buch mit den sieben Siegeln genannt. Daß sie der physikalischen Denkweise näher lag als der mathematischen, dafür zeugt eine Erzählung meines einstigen ehrwürdigen Aachener Kollegen *Wüllner*. Er war (wenn ich nicht irre in den sechziger Jahren) in den Sommerferien mit *Helmholtz* und *Weierstraß* auf dem Rigi zusammen. *Weierstraß* hatte die Riemannsche Dissertation mitgenommen, um diese ihm schwer verständliche Lektüre in der Ferienruhe zu bewältigen. *Helmholtz* aber wunderte sich über die Schwierigkeiten, die der Fachmathematiker bei *Riemann* vorfand; für ihn war *Riemanns* Darstellung unmittelbar einleuchtend.

*Klein* stand ebenso wie *Riemann* dem physikalischen Denken nahe. Sein eigentlicher Lehrer *Plücker* war Mathematiker und beobachtender Physiker zugleich, und *Klein* war sein Laboratoriumsassistent. *Kleins* erste Vorlesung als Privatdozent in Göttingen galt dem Satz von der Erhaltung der Energie. Die übernommene Pflicht, *Plückers* Liniengeometrie nach dessen Tode herauszugeben, hielt ihn zunächst von weiterer physikalischer Betätigung ab, und als er nach Erledigung dieser Arbeit daran gehen wollte, sich energischer mit Physik zu beschäftigen, wurde er Ordinarius der Mathematik in Erlangen. Trotzdem blieb er mit der Entwicklung auf physikalischem Gebiete in Fühlung. Früher als die meisten deutschen Physiker (*Helmholtz* natürlich ausgenommen) erkannte er die Bedeutung der Maxwellschen Theorie und brach für sie, zumal gegenüber seinen Leipziger physikalischen Kollegen, eine Lanze. Besonders nahe stand ihm *W. Thomsons* intuitive Erfassung der Mechanik und Mathematik.

Unvergeßlich werden mir die ersten Besprechungen sein, zu denen *Klein* mich bei Beginn meines Göttinger Aufenthaltes einlud. Er sah ja, als richtiger „Romantiker“ der Wissenschaft, einen Hauptteil seiner Tätigkeit darin, jüngere Kräfte an die Wissenschaft und an sich heranzuziehen. Ich kam mit allerlei Ansätzen zur Behandlung physikalischer Differentialgleichungen nach Göttingen. Er ließ sich alles, was ich plante, gern auseinandersetzen und rückte es in den allgemeinen Zusammenhang der mathematischen Literatur und seiner zusammenfassenden Anschauungen. In den Vorlesungen über Potentialtheorie und physikalische Differentialgleichungen, die *Klein* kurz zuvor gehalten hatte und deren Ausarbeitungen im mathematischen Lesezimmer jedermann zugänglich waren, fand ich wesentliche Teile meiner Pläne bereits ausgeführt vor, so das Voranstellen einer charakteristischen Haupt-

funktion für die verschiedenen physikalischen Differentialgleichungen und die Übertragung der Greenschen Methoden von der Potentialtheorie auf die anderen Gebiete der Physik. *Klein* hatte die Abendstunden von 6—8 Uhr in der Regel solchen Besprechungen vorbehalten; an mich kam anfangs fast in jeder Woche einmal die Reihe. Jedesmal war am Schluß der Besprechung der Tisch mit einer Menge Bücher bedeckt, in denen er den allgemeinen Zusammenhang meiner Einzelprobleme mit der mathematischen Literatur aufgezeigt hatte.

Auch während meiner zweijährigen Assistentenzeit bei *Klein* und während späterer gemeinsamer Arbeiten habe ich *Klein* außerordentlich viel zu danken gehabt. Ich habe es stets lebhaft empfunden, daß die Kleinsche Auffassung der Mathematik, die Betonung der geometrischen Evidenz gegenüber der einseitigen Hervorkehrung des rein Logischen und Algorithmischen, gerade für die Handhabung der mathematischen Anwendungen in Mechanik und Physik die richtige Schulung gibt. Schon allein seine Warnungen vor der übertriebenen Ängstlichkeit gegenüber Konvergenzfragen und sein grundsätzlicher Optimismus bezüglich der Zulänglichkeit der mathematischen Hilfsmittel und ihrer Anpassungsfähigkeit an die Erfordernisse der Naturwissenschaften befreien den auf die Anwendungen Gerichteten von den Hemmungen der Schulmeinung und bestärken ihn in zuversichtlichem Schaffen. *Kleins* Mathematik ist mehr ein Schauen, als ein Grübeln und Zerlegen. Und das muß die Mathematik in der Tat sein, wenn sie in den Anwendungen ihre ganze Kraft entfalten soll.

Einen Niederschlag der Kleinschen Vorlesungen über mathematische Physik bilden die Bücher von *Böcher* über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie und von *Pockels* über die Schwingungsvorgänge (die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ ). *Böchers* Buch strebt mehr die mathematische Allgemeinheit an und ordnet die speziellen, nach Zylinder- und Kugelfunktionen fortschreitenden Reihen der Physik in die allgemeinen Reihen nach Laméschen Funktionen ein; zugleich zeigt es die allgemeine Kraft des Kleinschen Oszillationstheorems. Das *Pockelsche* Buch dagegen knüpft an *Rayleighs* Theorie des Schalles an und bildet eine vorzügliche Einführung in die speziellen Methoden der mathematischen Physik. Es liest sich, als ob *Klein* es selbst geschrieben hätte und führt dadurch dem Leser die Stärke von *Kleins* Persönlichkeit zu Gemüte: Der in seinem Temperament ganz anders geartete *Pockels* fügte sich, solange er mit *Klein* zusammen arbeitete, der suggestiven Kraft seiner überragenden Persönlichkeit.

Ein neues Band hat die Entwicklung der letzten Jahre zwischen *Klein* und der mathematischen Physik geschlungen, und auch dieses Band steht unter dem Zeichen des großen Namens *Riemann*. Schon einmal, bald nach der Begrün-

dung der speziellen Relativitätstheorie, hatte *Klein* (in der Zeitschrift für Mathematik und Physik) zu dieser das Wort ergriffen, um die bereits von *Minkowski* erkannten Zusammenhänge der neuen physikalischen Weltanschauung mit der von *Klein* früher entwickelten Auffassung der nichteuklidischen Geometrie als einer „projektiven Maßbestimmung“ weiter zu verfolgen. Als aber in den letzten Jahren aus der speziellen die allgemeine Relativitätstheorie herauswuchs, da sah *Klein* in ihr die Erfüllung seines „Erlanger Programmes“ im weitesten Sinne, die Verwertung seiner alten gruppentheoretischen Prinzipien, die er zunächst nur auf die Geometrie angewandt hatte, für die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit der Physik bei Zugrundelegung der allgemeinen Gruppe der Punkttransformationen. Die Maßbestimmung, die dieser Gruppe adäquat ist, wird nicht mehr die projektive, sondern die allgemeine Riemannsche der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit von beliebiger Krümmung. Der Standpunkt, zu dem *Einstein* sich durch den Zwang der physikalischen Postulate unter unsäglichen Mühen heraufgearbeitet hatte, war schließlich derselbe, den die jungen Mathematiker *Klein* und *Lie* auf ihrem geometrischen Spezialgebiet bereits in den siebziger Jahren eingenommen und von dem aus sie eine mühelose Umschau auf die geometrischen Aufgaben gehalten hatten.

Wie souverän aber *Riemann* selbst über die letzten Prinzipien der Naturerkenntnis nachgedacht hat, das erkennen wir mit Staunen, wenn wir die Schlußworte seines Habilitationsvortrages „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“, lesen, wenn wir sie heutzutage lesen, nachdem uns die physikalische Entwicklung die Augen für diese prophetischen Andeutungen geöffnet hat. *Riemann* fragt hier nach dem inneren Grunde der Maßverhältnisse des Raumes und sagt, daß „bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anderswoher hinzukommen muß“. „Es muß also entweder das dem Raum zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden (Quantentheorie?), oder der Grund der Maßverhältnisse muß außerhalb, in darauf wirkenden, bindenden Kräften (*Einsteins* Gravitationstheorie!) gefunden werden.“

*Klein* hat diese Dinge in einer Folge von Vorlesungen dargestellt, die er während des Krieges vor einem ausgewählten Hörerkreise gehalten hat. Die erste Vorlesung behandelt die algebraische Invariantentheorie, die zweite die Invariantentheorie der Lorentzgruppe, die dritte diejenige der allgemeinen Relativitätstheorie; diese drei Vorlesungen liegen in sorgfältiger Ausarbeitung vor, neben inhaltreichen Noten in den „Göttinger Nachrichten“, in denen *Klein* seine Auffassung der allgemeinen Relativitätstheorie skizziert und zum Teil gegen diejenige von *Hilbert* abgegrenzt hat. Eine vierte Vorlesung soll,

wenn ich recht berichtet bin, die Invariantentheorie der Berührungstransformationen und ihre Bedeutung für die allgemeine Mechanik bringen. Auch diese Vorlesungen haben den Reiz seiner Vorlesungen aus jüngeren Jahren: Sein wunderbarer Überblick über die Zusammenhänge der mathematischen und physikalischen Begriffsbildung führt uns mühelos zu den letzten Errungenschaften der Einsteinschen Gedankenwelt und zeigt sie uns als Krönung einer lange vorbereiteten mathematischen Entwicklung. Es wird alle Verehrer des großen Mannes mit Freude und Befriedigung erfüllen, daß derselbe Geist, der mit zwanzig Jahren das Gebiet der Mathematik in allen seinen Verzweigungen meisterte, der von hier aus auf der Höhe seines Lebens nach den Nachbargebieten der Physik, der Technik und des Unterrichts die Brücken schlug und der vor wenigen Jahren unter der Last des von ihm Geschaffenen und Geplanten zusammenzubrechen drohte, als Siebzigjähriger die Kraft wiedergefunden hat, um das größte wissenschaftliche Problem der letzten Jahre mit der Klarheit seines Denkens zu durchdringen und an die Probleme seiner Jugendjahre anzuschließen.

### Felix Klein und die Reform des mathematischen Unterrichts.

Von Prof. Dr. H. E. Timerding, Braunschweig.

Was *Felix Klein* für das Unterrichtswesen geleistet hat, wissen am besten die zu beurteilen, die das Glück hatten, an seiner Arbeit teilzunehmen; es dringt aber auch immer mehr zum Verständnis aller der Kreise, die am mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht irgendwie beteiligt sind. Die Widerstände und Anfeindungen, die er in reichem Maße erfuhr, sowie er von der luftigen Warte der rein wissenschaftlichen Forschung in die Arena der Schulkämpfe hinunterstieg, sind mehr und mehr einer gerechten Würdigung der Ideen und Absichten, die ihn bei seiner Wirksamkeit für die Reform des mathematischen Unterrichts leiteten, gewichen. Langsam beginnen die Früchte zu reifen, die der von ihm gestreuten Saat entsprossen sind. Was erst den meisten neu und befremdlich war, wird nach und nach Gemeingut und erscheint als etwas Natürliches und fast Selbstverständliches. Allgemach dünkt es unbegreiflich, wie die Gedanken, für die er sich mit der ganzen Kraft seiner machtvollen Persönlichkeit eingesetzt hat, als störender Eingriff in eine festgewurzelte Überlieferung aufgefaßt und so hartnäckig mißverstanden werden konnten.

Das Wirken *Felix Kleins* wird allezeit ein Markstein in der Entwicklung des mathematischen Unterrichts bleiben. Gewiß ist dies und jenes, was er mit Einsetzung seiner glänzenden Redner- und Darstellungsgabe vertreten und mit der ihm eigenen, ruhigen und besonnenen, durch keinen

Widerspruch zu verwirrenden Sicherheit verteidigt hat, schon vorher von anderen ebenso oder ähnlich geäußert worden. Aber es allgemein durchzusetzen hatte doch niemand vermocht, und in der wagemutigen Tatkraft, in dem unermüdlischen Ausharren, in der scharfblickenden Erfassung und zielsicheren Verwertung der zur Mitarbeit geeigneten Persönlichkeiten, in der, vor keiner langweiligen und ermüdenden Kleinarbeit zurückschreckenden Sorgfalt und Genauigkeit, darin liegt vielleicht die größte Leistung *Kleins* bei seinem Wirken für den mathematischen Unterricht in allen seinen verschiedenen Formen.

Es ist aber klar, daß, wer eine solche Begabung für praktische Aufgaben besitzt, sie aus einer seelischen Notwendigkeit heraus früher oder später betätigen muß. Darum war es keine Abirrung von der rein wissenschaftlichen Laufbahn, wenn *Klein* sich, als die Stunde gekommen war, dem Unterrichtswesen zuwandte. Innere Entwicklung und äußere Umstände haben sich dabei in so merkwürdiger Weise die Hand gereicht, daß dieser Übergang mit geradezu elementarer Selbstverständlichkeit erfolgte.

Ein so zum Lehren berufener Mann wie *Klein* mußte von Anfang an ein tiefes Interesse für Unterrichtsfragen zeigen. Nur hielt sich dieses Interesse bei *Klein* zunächst durchaus im Rahmen seines eigenen Lehramtes. Er hat eine Wirksamkeit als Hochschullehrer entfaltet, wie kaum ein Mathematiker vor und nach ihm. Schon in dieser Lehrtätigkeit ist auch eine gute Menge von organisatorischer Arbeit inbegriffen. Aber die in ihm schlummernde Neigung zu weit ausblickender organisatorischer Wirksamkeit erwachte doch erst recht, als er in seinen Vorlesungen, in denen er nach und nach das ganze ungeheure Gebiet der wissenschaftlichen Mathematik zu umspannen trachtete, zu Anfang der neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts zur Mechanik zurückkehrte, der er schon zu Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn, angeregt durch seinen Lehrer *Plücker*, sich zugewendet hatte.

Dabei kehrten seine Gedanken naturgemäß in eine Bahn zurück, die ihm, dem Sohne des rheinischen Industriegebiets, von Haus aus nahe lag, und aus der ihn nur die glänzenden Erfolge seiner ersten geometrischen Arbeiten gerissen hatten. Dies war die Verbindung von Mathematik, Physik und Technik, insbesondere die Verfolgung der Mathematik nach der Seite ihrer Anwendungen hin. Er selbst hatte für sich eine Zeitlang eine Vereinigung des mathematischen Studiums mit der technischen und naturwissenschaftlichen Betätigung erträumt, und wenn diese Vereinigung sich auch als unerreichbar erwies, so blieb ihm doch das lebhafteste Interesse für die Anwendungsgebiete der Mathematik. Dieses Interesse rang sich nun in Göttingen zur klaren Erfassung eines bestimmten Zieles empor: „die besonderen Einsichten und Kenntnisse, die er



vermöge seiner mathematischen Tätigkeit im Laufe der Jahre gewonnen hatte, zur Herstellung einer engeren Verbindung zwischen Mathematik, Physik und Technik in Geltung zu bringen“. So entstand der Plan zur Schaffung eines physikalisch-technischen Institutes an der Universität Göttingen, mit der weitergehenden Absicht, auf diese Weise „an den deutschen Universitäten eine allgemeine Bewegung im Sinne einer Annäherung an die Technik auszulösen“.

Wenn Kleins Absichten, soweit sie die Universität Göttingen betrafen, im vollsten Maße gelungen und dort eine Reihe mustergültiger, reich ausgestatteter und vortrefflich geleiteter Institute entstanden sind, das allgemeinere Ziel ist nicht erreicht. Die Technik liegt heute den Universitäten so fern wie vor 25 Jahren. Der Grund hierfür ist einerseits darin zu suchen, daß dem rein wissenschaftlichen Streben der Universitäten der Geist der Technik nicht gemäß ist, daß sie wohl den Weg von der Wirklichkeit zur Theorie finden, aber, ausgenommen in der medizinischen Fakultät (deren Analogie mit dem Ausbildungsgang und der Auffassungsweise, die an den Technischen Hochschulen herrscht, Klein mit Recht hervorhebt), nicht rückwärts den Weg von der Theorie zur Wirklichkeit. Andererseits fordert aber eine Anknüpfung an die Technik auch kostspielige äußere Einrichtungen, für welche nur in Göttingen die Mittel flüssig gemacht werden konnten.

Daß dies gelang, ist wesentlich der unermüden Werbearbeit Kleins und der klugen Politik zu danken, die er verfolgte. Er verstand es, die Unterstützung technisch und wissenschaftlich interessierter, kapitalkräftiger Persönlichkeiten zu gewinnen, auf Grund deren dann auch der Staat seine Beihilfe nicht versagte, zumal Klein in Althoff einen mächtigen und verständnisvollen Förderer seiner Pläne fand.

Nachdem so schon 1897 mit einer ersten von drei Stiftern erhaltenen Anzahlung einige Maschinen angeschafft und zu ihrer Verwertung im Lehrbetrieb ein außerordentlicher Professor mit den nötigen Hilfskräften angestellt worden war, wurde am 28. Februar 1898 die „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik“ gegründet, die durch hohe Jahresbeiträge ihrer Mitglieder und weitere sehr reichliche private Zuwendungen mit den staatlichen Zuschüssen zusammen die Mittel für die nach und nach entstandenen Institute an der Universität Göttingen aufgebracht hat. Später wurde der Bezeichnung dieser Vereinigung auch noch die „angewandte Mathematik“ hinzugefügt. Klein hatte erkannt und auch anderen begreiflich zu machen verstanden, daß die geplanten Neuerungen auch eine Erweiterung des mathematischen Studiums in sich schließen mußten. Zunächst wurde dabei an die darstellende Geometrie gedacht, für die Klein immer Interesse gehabt, und die er schon nach seiner Berufung an die Erlanger Universität

als einer der ersten vor „reinen Mathematikern“ gelesen hatte. Daran schloß sich dann die Geodäsie und aus einer durch Lexis veranlaßten Parallelgründung heraus die Versicherungsmathematik an.

Der angewandten Mathematik wurde nun als Lehrgegenstand der Universitäten ein fester Boden verliehen dadurch, daß 1898 die neue preussische Prüfungsordnung für das Lehramt an höheren Schulen herauskam, in der die angewandte Mathematik als besonderes, allerdings nur in Verbindung mit der reinen Mathematik wählbares Lehrfach erschien. Dadurch erhielten nicht bloß die Göttinger Einrichtungen einen äußeren Zweck, dem sie dienen konnten, auch für die übrigen Universitäten ergab sich die Notwendigkeit, durch besondere Lehraufträge und Lehrmittel für die Vorbereitung der Mathematikstudierenden auf das neue Prüfungsfach zu sorgen.

Wenn aus der Neuerung, die vor nunmehr 20 Jahren mit so frohen Erwartungen begrüßt werden konnte, noch nicht der Segen geflossen ist, den Klein selbst davon erhofft hatte, so liegt das wohl an folgendem: Die angewandte Mathematik ist wohl ein besonderes Prüfungsfach geworden, aber sie ist nicht auch ein besonderes Lehrfach an den höheren Schulen. Was die Ausbildung in der angewandten Mathematik bezweckt, so wie wir sie heute fassen, als die Unterweisung in den Teilen der Mathematik, die auf deren Anwendung in der Wirklichkeit hinzielen, also namentlich die Schulung im Messen, Rechnen und Zeichnen, das bedeutet eine Ausbildung, die jeder empfangen haben sollte, der mit dem rechten Erfolg den mathematischen Unterricht an einer höheren Schule erteilen will, es müßte also überhaupt einen integrierenden Bestandteil des mathematischen Studiums bilden. Ehe das nicht erreicht ist, sind die Ansprüche, die von seiten der Schule gestellt werden müssen, nicht erfüllt. Dagegen ist für die Schule nicht unbedingt nötig die weitergehende Ausbildung in einem besonderen Spezialfache, sei es in Versicherungsmathematik, Astronomie oder Geodäsie, in der meist auf „technische Mechanik“ zusammengezogenen Maschinenteknik oder in der Elektrotechnik. Es ist klar, daß diese weitergehende Ausbildung entweder an der Oberfläche bleibt oder aber mehr anderen, außerhalb des Lehramts stehenden Berufstätigkeiten zu dienen geeignet ist, als Versicherungsmathematiker, als Astronom, Geodät oder als technischer Physiker, und danach aufgefaßt und ausgestaltet zu werden verdient, wie das chemische Spezialstudium auf der Universität längst der späteren Verwendung als technischer Chemiker nutzbar gemacht ist<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Hierbei soll nicht unerwähnt bleiben, daß bei besonderen Fachschulen die genannten Wissenszweige, und zwar immer je einer von ihnen, für die Lehrtätigkeit große Bedeutung gewinnen, so die Geodäsie bei den Landwirtschaftsschulen, die Versicherungsmathematik und was mit ihr zusammenhängt bei den Handelsschulen, die angewandte Mechanik und Physik bei den

Die Annäherung der Universitäten an die Technik bildete aber nur die eine Seite der Bestrebungen, die Klein leiteten. Die andere Seite war die Stellungnahme der Technischen Hochschulen zu den theoretischen Wissenschaften. Vielfach durch ungeeignete Vertreter dieser Wissenschaften gereizt, hatte sich in den Kreisen der Techniker das Bestreben gezeigt, die Ausbildung der künftigen Ingenieure nur solchen Männern anzuvertrauen, die selbst technisch geschult waren, und es war von ihnen energisch betont worden, daß Mathematik und Naturwissenschaften für den Ingenieur nur die Bedeutung von Hilfswissenschaften hätten, deren eingehende Kenntnis und tieferes Verständnis nicht zu erstreben seien, und die nur im Zusammenhang mit ihren technischen Anwendungen behandelt werden dürften. Diesen Auffassungen und Bestrebungen gegenüber war es nun von großer Bedeutung, daß Klein, der selbst von 1875 bis 1880 an einer Technischen Hochschule gewirkt hatte, vom Jahre 1895 ab die Beziehung zu den Ingenieuren suchte, daß er sozusagen in die Höhle des Löwen ging. Trotzdem er damit keine aggressiven Absichten verfolgte, sondern nur klärend wirken und sich selbst Klärung verschaffen wollte, wurde der Streit zunächst eher heftiger als milder, aber der schließliche Erfolg ist doch eine volle Verständigung gewesen. Heute lebt jene Fehde nur noch in der Erinnerung. Namentlich der inzwischen ins Leben gerufene Deutsche Ausschuß für technisches Schulwesen hat viel zur endgültigen Beseitigung aller Zweifel und Unklarheiten beigetragen<sup>1)</sup>.

Soweit, wie wir sie bis jetzt verfolgt haben, betraf Kleins Wirksamkeit nur den Lehrbetrieb der Universitäten, die höheren Schulen dagegen nur mittelbar durch die erstrebte Ausbildung der Lehramtskandidaten mathematischer Fachrichtung. Da kam die Schulkonferenz von 1900, an der auch Klein beteiligt war. Es war nur natürlich, daß er hierbei aus den ihn augenblicklich leitenden Bestrebungen heraus besonders die Heranziehung der Anwendungen für den mathematischen Schulunterricht betonte, indem er aber weise Mäßigung empfahl. Sehr mit Recht hob er als den eigentlichen Zweck des mathematischen Unterrichts hervor, in dem Schüler die Überzeugung entstehen zu lassen, daß „richtiges Nachdenken auf Grund richtiger Prämissen die Außenwelt beherrschen läßt“.

Diese Äußerungen enthielten nun an sich keineswegs etwas völlig Neues, sondern wiederholten nur, was u. a. bereits 1891 in den Braunschweiger Beschlüssen des Vereins zur Förderung technischer Fachschulen, die Astronomie bei den Seefahrtsschulen.

<sup>1)</sup> Die für das Vorstehende in Betracht kommenden Aufsätze und Vorträge Kleins findet man zusammengestellt in der Vortragsammlung F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen (Leipzig, Teubner, 1900).

des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts einen ziemlich extremen und in der Entschliebung auf der Versammlung des Vereins zu Wiesbaden 1894 einen maßvolleren Ausdruck gefunden hatte; sie konnten deshalb sicher nicht eine besondere Erregung und Anfeindung hervorrufen. Ganz anders war es aber mit der Forderung Kleins, daß wenigstens an den Realanstalten die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung sowie der analytischen Geometrie Aufnahme finden sollten. Diese Forderung, die übrigens auf der Konferenz nicht bloß von Klein, sondern auch von Hauck, Lexis und Slaby vertreten wurde, erschien fortan geradezu als das Kennzeichen der sogenannten mathematischen Unterrichtsreform. Man war Anhänger oder Gegner dieser Reform, je nachdem man jener Forderung zustimmte oder nicht, und dabei war die Auffassung durchaus die, daß es sich, wie man es aus Kleins eigenen Bemerkungen und namentlich aus E. Göttings Ausführungen dazu entnehmen mußte, um einen besonderen Lehrgang in beiden Disziplinen handeln solle. Götting gab geradezu ein vorläufiges Programm für den Lehrgang in der Infinitesimalrechnung, der bis zu der Lösung einfacher Differentialgleichungen aufsteigen und von dem Unterricht in Prima etwas mehr als ein Jahr in Anspruch nehmen sollte. Wiederum war es keineswegs etwas Neues, was hier verlangt wurde. Schon mehrfach war von einzelnen Schulmännern die Aufnahme der Differential- und Integralrechnung an den höheren Schulen gefordert worden, und an einer ganzen Reihe von Realanstalten wurden sie tatsächlich unterrichtet. Die württembergischen Oberrealschulen bringen bis heute an Differential- und Integralrechnung, analytischer und darstellender Geometrie so viel, daß die ersten Hochschulsemester der später an der Technischen Hochschule Studierenden ganz wesentlich dadurch entlastet werden, und man behauptet, auf diese Weise sehr gute Erfahrungen gemacht zu haben.

Es ist also Kleins Vorschlag weder völlig neu gewesen, noch kann ihm der Vorwurf der Unrealisierbarkeit gemacht werden. Trotzdem hat er einen heftigen Widerstand ausgelöst. Dieser Widerstand wurde keineswegs dadurch gemildert, daß die im Anschluß an die Schulkonferenz 1901 herauskommenden neuen preussischen Lehrpläne in maßvoller Beschränkung nur forderten, daß den Schülern der oberen Klassen ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffs, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sein sollten, zu erschließen, und auch, daß eine Einführung in den wichtigen Koordinatenbegriff zu erfolgen habe. Schon dies war vielen sehr un bequem, die an einem veralteten Begriff der Elementarmathematik kleben. Aber es liegt doch dem Widerstreben, einigen bisher dem Fachstudium auf der Hochschule vorbehaltenen Disziplinen Eingang an der höheren Schule zu verschaffen, auch ein gesunder Gedanke zugrunde.

der sich gegen die Auffassung richtet, daß diese Einführung neuer Teilgebiete der Mathematik durch die Bedürfnisse bestimmter Berufe, welche die Schüler später möglicherweise ergreifen können, zu rechtfertigen sei. Die demgegenüber geltend gemachte Ansicht ist die, daß die Bestimmung der höheren Schule ausschließlich sei, eine höhere Allgemeinbildung mitzuteilen, und daß die Wahl der einen oder anderen von den drei Arten höherer Schulen, die wir haben, in jedem Fall nicht durch den späteren Beruf des Zöglings, sondern nach seiner besonderen geistigen Veranlagung zu bestimmen sei. Das hat auch Klein sehr bald erkannt. Während er auf der Schulkonferenz 1900 seine Forderung ausdrücklich damit begründete, daß einer großen Anzahl von Studierenden an unseren Hochschulen mit einem solchen mathematischen Vorkurse an der Schule, wie er ihn wünschte, wichtiger Vorschub geleistet werden könnte, ging er bei einem Vortrage auf dem Ferienkurs in Göttingen Ostern 1904 lediglich von dem Grundsatz aus, daß das Ziel des mathematischen Schulunterrichts ein klares Verständnis der mathematischen Bestandteile unserer heutigen Kultur sein müsse. Diese Bestandteile ruhen, sagte er, ganz wesentlich auf dem Funktionsbegriff und seiner Ausgestaltung nach geometrischer und analytischer Seite, und so ergibt sich mit Notwendigkeit die These, daß der Funktionsbegriff in zweckmäßiger Ausgestaltung in den Mittelpunkt des theoretisch-mathematischen Unterrichts zu rücken ist.

Diese These ist unter dem Schlagworte des „funktionalen Denkens“ denn auch das geworden; was von Kleins Bestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts in die weitesten Kreise gedrungen ist. Sie schließt aber schon in sich, daß nun nicht mehr ein besonderer Lehrgang der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung erstrebt werden soll, daß vielmehr im Verlauf der ganzen Schulausbildung der Funktionsbegriff und mit ihm in organischer Verbindung der Koordinatenbegriff und die Infinitesimalbegriffe mit den allgemein üblichen Bezeichnungen der Differentiale und Integrale, nach und nach aufsteigend, anschaulich und faßbar entwickelt werden sollen. Also keinen Kursus der Differential- und Integralrechnung, nur die für die Entwicklung der Begriffe notwendigen und, wenn auch in anderer Form, für die physikalischen Anwendungen immer benutzten Differentialquotienten und Integrale der allereinfachsten Funktionen zu geben, und damit auch nicht in dem Schüler die Täuschung zu erwecken, als ob er nun schon die „höhere Mathematik“ beherrsche, das ist die Auffassung, zu der sich Kleins Ideen von der Reform des mathematischen Unterrichts abklärten, und die heute auch noch als die Ansicht der „Reformer“ gelten kann<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Über die mathematische Unterrichtsreform und Kleins hierauf bezügliche Tätigkeit vgl. man die Vortragsammlung *F. Klein* und *E. Riecke*, Neue Beiträge

Inzwischen hatte sich Kleins Interesse, aber über den mathematischen Unterricht hinaus der allgemeineren Frage nach der Rolle, welche die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer an den höheren Schulen zu spielen berufen sind, zugewendet. Er erreichte auf der Naturforscherversammlung in Cassel 1903, daß beschlossen wurde, „die Gesamtfragen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen bei nächster Gelegenheit zum Gegenstande einer umfassenden Verhandlung zu machen.“ Nach diesem Beschluß ist 1904 auf der Versammlung in Breslau die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte entstanden, deren Tätigkeit bereits im folgenden Jahre, 1905, auf der Versammlung in Meran zu bestimmten Lehrplanentwürfen, insbesondere auch auf mathematischem Gebiete, führte. Dieser mathematische Lehrplanentwurf führte zum erstenmal aus, wie die neuen Ideen zur Geltung kommen sollten, wie insbesondere der Funktionsbegriff aufzubauen sei. Was die Behandlung der Differential- und Integralrechnung betrifft, so wurde sie vorsichtig als eine eventuelle bezeichnet und dem Lehrer freie Hand gelassen, ob er sie aufnehmen wolle oder nicht. Die Arbeit der Unterrichtskommission reichte bis 1907<sup>2)</sup>, und sie wurde dann zu einer den Unterrichtszwecken dienenden Abordnung sämtlicher an Mathematik und Naturwissenschaften interessierten deutschen gelehrten Gesellschaften ausgestaltet, dem Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU). Über die Tätigkeit dieses Ausschusses und die Rolle, die Klein in ihm gespielt hat, zu sprechen, würde hier zu weit führen, aber so viel kann doch gesagt werden, daß, was Gutes dabei herausgekommen ist, zum großen Teil Kleins unermüdlicher Mitarbeit und dem belebenden und anfeuernden Einfluß seiner Persönlichkeit zu danken ist.

Die Ausdehnung auf den naturwissenschaftlichen Unterricht ist jedoch nur eine Seite, nach der sich Kleins Bestrebungen allmählich entwickelten, die andere Seite bildet die Erweiterung der Arbeit am mathematischen Unterricht von dem engeren Umkreis der höheren Schule auf die Gesamtheit aller Lehrstätten, an denen die Mathematik überhaupt in irgendwelcher Form eine Rolle spielt, und damit erst die Hervorhebung der Kulturbedeutung, die der Mathematik zukommt, in ihrem vollen Umfange. Den äußeren Anlaß hierfür bildete die Gründung einer Internationalen

zur Frage des mathematischen Unterrichts (Leipzig, Teubner, 1904), *F. Klein*, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, bearbeitet von *R. Schimmack* (ebenda 1907) und die IMUK-Abhandlung von *Schimmack*, Die Entwicklung der mathem. Unterrichtsreform in Deutschland (ebenda 1911).

<sup>2)</sup> *A. Gutzmer*, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (Leipzig, Teubner, 1908).

mathematischen Unterrichtskommission auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Rom Ostern 1908. Klein wurde nicht bloß zum Vorsitzenden dieser Kommission, der seither vielgenannten IMUK, gewählt, er hatte auch die Berichterstattung der deutschen Unterkommission über den mathematischen Unterricht in Deutschland zu veranlassen und zu leiten.

Diese Berichterstattung wuchs sich zu einem gewaltigen literarischen Unternehmen aus, einer Materialsammlung ersten Ranges, die, wenn auch vieles naturgemäß bei der rasch fortschreitenden Entwicklung bald veralten muß, doch auf lange Zeit hinaus die sichere Unterlage für alle Bestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichtswesen zu bilden berufen ist. Aber nicht das allein. Die Sammlung dieser Berichte bedeutet überhaupt ein einzigartiges Kulturdokument. Sie gibt ein allgemeines Bild von dem Zustand des Unterrichtswesens, wie es vor dem Kriege im Deutschen Reiche bestand, und daß in den Mittelpunkt dieses Bildes der mathematische Unterricht gerückt ist, entstellt es nicht, sondern gibt ihm nur festere Züge und einen besonderen Charakter. Es macht sich doch eben geltend, daß die Mathematik sozusagen die Ur- und Grundwissenschaft ist und sich deshalb in ihr der geistige Zustand eines Volkes deutlich spiegeln kann. Bei keiner anderen Wissenschaft wäre es in gleicher Weise möglich gewesen, an ihr einen Überblick über die Bildungsbestrebungen und Bildungseinrichtungen in allen ihren Verästelungen zu geben. Klein hatte schon 1896 in einem Vortrage hervorgehoben, daß die Mathematik die Entwicklung der menschlichen Kultur auf allen ihren Stufen begleitet habe, und daß deshalb ihre Verbreitung geeignet sei, die Überzeugung von der Solidarität aller höheren geistigen Interessen zur Geltung zu bringen.

Diese Äußerung hat in der Berichterstattung der deutschen IMUK, die in acht stattlichen Bänden „Abhandlungen“, wozu noch ein Band „Berichte und Mitteilungen“ kommt, jetzt abgeschlossen vorliegt<sup>1)</sup>, ihre volle Bestätigung gefunden. Welche ungeheure Energie, welche unendliche Geduld und welche Selbstverleugnung es erfordert hat, dieses Werk zu Ende zu führen, vermag nur der zu ermessen, der es selbst in seinem Entstehen und Fortschreiten verfolgt hat. Daß es Klein gelungen ist, kann mit Recht als die Krönung seiner Arbeit an der Entwicklung des deutschen Unterrichtswesens betrachtet werden. Als es vollendet war, hat er auch selbst das Gefühl gehabt, damit einen Abschluß der 20 Jahre früher begonnenen Tätigkeit erreicht zu haben, und er wandte, so lebhaft sein Interesse für die Unterrichtsfragen blieb, sich in seiner Hauptarbeit doch von diesen Fragen wieder der rein wissenschaftlichen Beschäftigung zu. Die Zukunft aber wird es ihm Dank wissen, was er für die Erzie-

hung eines gesunden Wirklichkeitssinnes und zielbewußter Erfassung der Umwelt durch die Kraft des an Maß und Zahl anknüpfenden und darum von aller persönlichen Meinung unabhängigen Denkens getan hat. Denn darin liegen doch die großen, beharrlich festgehaltenen Zielpunkte seines Wirkens für die Reform des mathematischen Unterrichts.

## Felix Klein und die Förderung der „angewandten Wissenschaften“.

Von Prof. Dr. L. Prandtl, Göttingen.

Daß die exakten Universitätswissenschaften, die die Föhlung mit dem werktätigen Leben damals zum großen Teil vollständig verloren hatten und ihren Ruhm in der selbstgewählten Isoliertheit der „reinen Wissenschaft“ sahen, mit den Anwendungsgebieten wieder in lebendige Beziehungen gebracht werden müßten, war eine der leitenden Ideen Kleins vom Beginn seiner akademischen Tätigkeit an<sup>2)</sup>. Nach außen tritt diese Idee, die in seiner Hand auf mathematischem Gebiete bereits früh mancherlei wertvolle Früchte gezeitigt hatte, erst in seiner späteren Schaffensperiode stärker hervor, als er sich entschlossen hatte, auch für die physikalische Wissenschaft die Föhlung mit der inzwischen machtvoll sich entwickelnden Technik wieder in Gang zu bringen. Heute, wo diese Idee sich bereits in einem sehr weiten Kreise durchgerungen hat und schon sehr viel in dieser Richtung hat verwirklicht werden können, ist es schwer, sich klar zu machen, welche großen Widerstände nach außen und nach innen Klein seinerzeit überwinden mußte, um seinen mit ebenso viel Zähigkeit wie Klugheit verfochtenen Bestrebungen freie Bahn zu erkämpfen. Von den Plänen Kleins zur Verwirklichung dieser Idee, von den Schwierigkeiten, die sich ihnen entgegenstellten, und von dem, was erreicht ist und wie es erreicht worden ist, soll hier in Kürze berichtet werden.

Nach Kleins eigener Äußerung war ihm bereits durch das Vaterhaus und durch vielerlei Anregungen in der betriebsamen Vaterstadt Düsseldorf ein lebhaftes Empfinden für technische Dinge mitgegeben worden, so daß er sich sogar zeitweilig mit dem Gedanken getragen hat, selbst Technik zu studieren. Später hat während seiner Lehrtätigkeit an der Münchener Technischen Hochschule der Umgang mit den Lehrern der technischen Wissenschaften, besonders mit C. Linde, sehr anregend auf ihn gewirkt. Den entscheidenden Anstoß dazu, selbst in die Entwicklung dieser Dinge einzugreifen, gab jedoch erst viel später (1893) eine amerikanische Studienreise, die Klein gelegentlich der Weltausstellung zu Chicago im Auftrag des preußischen

<sup>1)</sup> Erschienen 1909—1916 bei Teubner in Leipzig und Berlin.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. die in der Zeitschr. f. math.-naturw. Unterricht Bd. XXVI (1895) abgedruckte Leipziger Antrittsrede von 1880. (Lit.-Verz. D Nr. 111.)

Kultusministeriums unternahm und auf der er auch das amerikanische Hochschulwesen studierte. Die reich ausgestatteten Lehrmittel mancher der besuchten Anstalten, besonders aber das „physikalische Experiment an der lebendigen Maschine“ hatten ihm starken Eindruck hinterlassen, daneben auch das drüben ausgeprägte System der Selbsthilfe, der es möglich gewesen war, Männer der Praxis, die über die nötigen Mittel verfügten, für die Förderung wissenschaftlicher Dinge zu interessieren.

Um das von ihm sehnlich herbeigewünschte Bindeglied zwischen den Universitätswissenschaften und der Technik zu schaffen, vertrat er nun, alsbald nach seiner Rückkehr, in Berichten an das Ministerium und in einer Denkschrift, die er auch führenden Industriellen übersandte, den Plan, in Göttingen dem mathematisch-physikalischen Unterrichtsbetrieb Unterrichtseinrichtungen für „technische Physik“ anzugliedern. Damit sollte vor allem Gelegenheit geschaffen werden zur Weiterbildung von Ingenieuren zu wissenschaftlichen Führern der Technik und zu künftigen Lehrern an Technischen Hochschulen. Außerdem sollten durch diese Unterrichtseinrichtungen die Universitätshörer die Möglichkeit erhalten, sich über Fragen der Technik zu unterrichten.

Da die Technischen Hochschulen bis dahin mit der Ausgestaltung ihrer immer weiter anwachsenden Lehraufgaben vollauf beschäftigt waren und nicht dazu gekommen waren, für die Heranbildung eines geeigneten akademischen Nachwuchses für sie selbst Nennenswertes zu tun, schien dieser Plan sehr viel Erfolg zu versprechen. Die Überbrückung der damals sehr großen Kluft zwischen Universität und Technischer Hochschule würde sich durch den Übergang der an der Universität weitergebildeten Ingenieure in das Lehramt an den Technischen Hochschulen, wie auch durch die Heranziehung von technisch vorgebildeten Lehrkräften an die Universität mit der Zeit von selbst in organischer Weise vollzogen haben.

Jedoch stieß der Plan nicht nur bei den Industriellen, an die Klein sich gewandt hatte, auf unzureichendes Interesse, sondern es entstand ihm auch von seiten der Technischen Hochschulen eine äußerst heftige Gegnerschaft. Die oben erwähnten Mängel waren auch dort schon empfunden worden; man war mit allerhand Reformplänen, besonders bezüglich der Schaffung von Ingenieurlaboratorien, beschäftigt und empfand daher die Kleinschen Pläne als eine Durchkreuzung der eigenen. Die heftige Befehdung der Kleinschen Pläne konnte schließlich durch ein auf der Hauptversammlung des Vereins Deutscher Ingenieure zu Aachen (1895) abgeschlossenes Kompromiß beschwichtigt werden: Gemäß diesem „Aachener Frieden“ sollten in Göttingen lediglich Einrichtungen getroffen werden, durch die den Universitätsstudenten, beson-

ders den Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik, Gelegenheit zur Einführung in technische Fächer geboten würde. Die Fortbildung der Ingenieure sollte dagegen Aufgabe der Technischen Hochschulen sein.

Aber auch diese verringerten Pläne fanden noch sehr erhebliche Gegnerschaft, wie aus der Diskussion zu einem Kleinschen Vortrage im Hannoverschen Bezirksverein des Vereins Deutscher Ingenieure sehr lebendig zutage tritt, in der sämtliche Redner gegen die Kleinschen Absichten sprachen<sup>1)</sup>. Aber auch an der Universität selbst war, von wenigen Ausnahmen abgesehen, der Kreis der Kollegen den Kleinschen Absichten nicht hold. Man befürchtete von dem Eindringen technischer Ideen und technischer Arbeitsweisen eine Minderung des hohen, auf die reine Wissenschaft gerichteten Geistes der Universität oder wenigstens ein „Übertönen der leisen Musik der Naturgesetze durch die Trompetenklänge der technischen Erfolge“ und versagte Klein die Unterstützung.

Ein anderer hätte sich von seinen Plänen vielleicht abbringen lassen, Klein aber machte, da ihm andere Mittel vorerst versagt blieben, selbst einen Anfang, verschrieb sich einen jungen Ingenieur<sup>2)</sup> als Assistenten und las selbst über „Technische Mechanik“! Sein Ziel, das Interesse von Leitern großer industrieller Unternehmungen für seine Ideen zu gewinnen, verlor er dabei nie aus dem Auge. Nach dreijährigen Bemühungen gelang endlich Weihnachten 1896 der erste Schritt vorwärts in dieser Richtung: Durch die Mithilfe seines Münchener Freundes Prof. C. Linde und des Leiters der Elberfelder Farbwerke und Landtagsabgeordneten Dr. H. Böttlinger kam eine erste Summe von 20 000 M. für ein kleines Maschinenlaboratorium zusammen. Mit Genehmigung der Unterrichtsverwaltung wurde eine Maschinenanlage für die elektrische Beleuchtung der Kgl. Bibliothek, die eben errichtet werden sollte, in dieses Laboratorium mit einbezogen. Um die für die Leitung des Laboratoriums erforderliche Lehrkraft zu gewinnen, wurde ein gangbarer Weg dadurch gefunden, daß der Lehrauftrag mit einer neubegründeten außerordentlichen Professur für

<sup>1)</sup> Vgl. Zeitschr. des Vereins Deutscher Ingenieure 1896, S. 102 u. f. Auf diesen Vortrag (Lit.-Verz. D Nr. 116) sowie auf einen weiteren im Hannoverschen Mathem. Verein (Lit.-Verz. D Nr. 119) sei hier besonders verwiesen. Beide Vorträge sind in der Schrift „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen“, Vorträge, gesammelt von F. Klein und E. Riecke, Leipzig 1900, wieder abgedruckt. Siehe dort auch den Vortrag auf der Düsseldorfer Naturforscher-Versammlung: „Universität und Techn. Hochschule“, (Lit.-Verz. D Nr. 125.) — Die Gegnerschaft der technischen Hochschulen trat übrigens auch später noch mehrmals heftig hervor, so in der Herrenhausrede von Prof. Staby vom 30. März 1900. Klein hat auf diese Rede in einer bei Teubner, Leipzig 1900, erschienenen, sehr lesenswerten Schrift geantwortet. (Lit.-Verz. A Nr. 20.)

<sup>2)</sup> Den jetzigen Professor Moritz Weber an d. Technischen Hochschule Charlottenburg.

landwirtschaftliches Maschinenwesen verbunden wurde.

So war ein Anfang gemacht! Anfang 1898 gelang es, einen kleinen Kreis von namhaften Industriellen in Göttingen zu versammeln, die sich für Kleins Pläne interessierten und die begonnene Sache weiter zu fördern beschlossen. Die so gegründete „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik“ erstarkte unter der Leitung ihrer beiden Vorsitzenden Böllinger und Klein in erfreulicher Weise und fand, was für ihr Gedeihen von größter Wichtigkeit war, in dem Leiter des preußischen Hochschulwesens, Ministerialdirektor Althoff, einen tatkräftigen Förderer. So entstanden sehr bald Unterrichts- und Forschungseinrichtungen auf dem Gebiete der Elektrotechnik und der angewandten Mathematik einschließlich Vermessungswesen und Nautik, die Anlagen für technische Physik konnten sehr wesentlich ausgebaut werden<sup>1)</sup>. Leider verbietet der Raum, auf alle Einzelheiten der Weiterentwicklung hier näher einzugehen. Wieviel im Jahre 1906 bereits erreicht war, ist aus der Festschrift zur Einweihung der physikalischen Institute, der eine Beschreibung der von der Göttinger Vereinigung geschaffenen Einrichtungen eingefügt ist, zu entnehmen<sup>2)</sup>. Von der Entwicklung bis in die neueste Zeit gibt die anlässlich des zwanzigjährigen Stiftungsfestes (1918) herausgegebene kleine Denkschrift<sup>3)</sup> ein höchst beachtenswertes Zeugnis.

Die Tätigkeit von Klein beschränkte sich im übrigen durchaus nicht auf die Schaffung der Institute, vielmehr erfüllte er sie durch seine ständige Fürsorge immer von neuem mit seinem Geiste und sorgte für gegenseitigen Kontakt und reibungsloses Ineinanderarbeiten. Die Sofaecke in seinem Studierzimmer und der ovale Tisch mit der geblühten Decke hat ungezählte Besprechungen gesehen, in denen er uns Mitarbeitern die neuen Ideen, die ihn erfüllten, auseinandersetzte und uns mit ihrer Durchführung betraute. Gar mancher Besuch in den neuen Instituten galt den jeweils neu geschaffenen Einrichtungen, denen er seine väterliche Sorge widmete. An dem Unterrichtsbetrieb der neuen Lehrgebiete nahm er zuweilen tätigen Anteil durch Veranstaltung von Seminaren, die er in Gemeinschaft mit den Ver-

<sup>1)</sup> Vgl. den Kleinschen Aufsatz in der Physikal. Zeitschrift, I. Jahrg. (Dez. 1899), der in der oben erwähnten Vortragsammlung ebenfalls abgedruckt ist. (Lit.-Verz. D Nr. 129.)

<sup>2)</sup> „Die physikalischen Institute der Universität Göttingen“, Festschrift 1906, herausgeb. von der Göttinger Vereinigung, Leipzig 1906 bei B. G. Teubner. Der vorerwähnte Aufsatz ist hier nochmals abgedruckt.

<sup>3)</sup> „Zum zwanzigjährigen Bestehen der Göttinger Vereinigung für angewandte Physik und Mathematik. Festbericht 1918.“ Als Manuskript gedruckt bei B. G. Teubner, Leipzig 1918. Die Kleinsche Festrede ist im Jahrb. d. Deutsch. Math.-Ver. 1919 wieder abgedruckt. (Lit.-Verz. D Nr. 165.)

tretern der in Betracht kommenden Fächer abhielt, und in denen er seine bewährten Lehrmethoden seinen Mitarbeitern vor Augen führte. Diese „Kleinschen Seminare“, die eine hervorstechende Besonderheit seines Lehrbetriebes darstellen, behandelten die verschiedensten Gebiete der technischen Mechanik, graphische Statik, Hydraulik, Elastizitätstheorie, Kreiselschifftheorie, Theorie des Schiffs, weiter auch Elektrotechnik u. a. m. und bestanden aus Vorträgen der Studenten über einzelne Abschnitte dieser Gebiete, die in ausführlichen gemeinsamen Vorbesprechungen und in eingehender persönlicher Bezugnahme mit den Vortragenden vorbereitet wurden. Fast regelmäßig waren sie der Ausgangspunkt von einigen Dissertationen. Für uns Lehrende waren sie eine Quelle von Anregung und Belehrung.

Wie Klein uns durch seinen prachtvollen Optimismus mit Fortriß und oft zu Leistungen brachte, an die wir selbst gar nicht einmal den richtigen Glauben hatten, dafür möchte ich als ein Beispiel, das mich selbst betrifft, die näheren Umstände anführen, wie ich zur Luftschiffahrt gekommen bin. Durch die Vermittlung von Althoff waren drei Göttinger, Klein, Wiechert und ich, in den technischen Ausschuß der 1906 gegründeten „Motorluftschiff-Studiengesellschaft“ berufen worden. Von Klein vor die Aufgabe gestellt, etwas zu ersinnen, was als Arbeit für diesen Ausschuß in Göttingen gemacht werden könnte, schlug ich eine Modell-Versuchsanstalt für die Messung der Widerstände der Luftschiffe — entsprechend den Schleppversuchsanstalten des Schiffbaues — vor und entwarf einen Plan für eine solche Anstalt. Dieser fand nach einigem Hin und Her wirklich die Genehmigung der Gesellschaft und die kleine Anstalt wurde in Göttingen gebaut. Kurz darauf wurde ich auch dazu kommandiert, Vorlesungen über Luftschiffahrt zu halten und erhielt hierzu einen offiziellen Lehrauftrag<sup>1)</sup>, den ersten dieser Art in Deutschland. Göttingen sollte, nach Kleins Plan, ein wissenschaftlicher Mittelpunkt für die Luftfahrt werden. Wie weit das in der Tat glücklich ist, zeigte die lebhafteste Beteiligung, die eine auf Kleins Anregung hin im Herbst 1911 veranstaltete „Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaft“ in Göttingen fand, zu der aus ganz Deutschland die beteiligten Kreise sich zusammenfanden<sup>2)</sup>. Diese Versammlung hat, wie erwähnt werden möge, die Gründung der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt im Frühjahr 1912 im Gefolge gehabt.

Klein ging aber noch weiter. Die inzwischen gegründete „Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft“ zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung in Göttingen<sup>3)</sup> hat auf spezielle Anregung von Herrn Böllinger, der diese Pläne sehr gefördert hat,

<sup>1)</sup> Dies auf spezielle Anregung von Herrn Böllinger, der diese Pläne sehr gefördert hat.

<sup>2)</sup> „Verhandlungen der Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaft am 3. bis 5. Nov. 1911 zu Göttingen.“ Oldenburg, München 1912. Die Fachvorträge sind auch im Jahrgang 1912 der Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt abgedruckt.

„Förderung der Wissenschaften“ sollte veranlaßt werden, an Stelle der sehr bescheidenen kleinen Modell-Versuchsanstalt ein großes Kaiser-Wilhelm-Institut für Aerodynamik in Göttingen zu errichten. Wieder erhielt ich den Auftrag, in einer Denkschrift auseinander zu setzen, warum dieses Institut nötig sei und warum es nirgends anders, als in Göttingen errichtet werden müsse. Ich entledigte mich dieser Aufgabe nach besten Kräften, aber ohne rechten Glauben an einen Erfolg. Und doch sollte wieder der Kleinsche Optimismus siegreich sein. War es das erste Mal die starke Hilfe von *Althoff* gewesen, so wurde diesmal unser Plan durch das Eingreifen des ersten Vorsitzenden der Göttinger Vereinigung, Herrn Geheimen Regierungsrat Dr. v. *Böttlinger*, der auch Senator der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft war, über die vorhandenen Schwierigkeiten hinweggetragen. Die Verhandlungen bezüglich des Institutes waren fast abgeschlossen, als der Krieg ausbrach und der Plan auf unabsehbare Zeit zurückgestellt werden mußte. Wieder war es im Frühjahr 1915 *Klein*, der mir die Idee eingab, eine neue Denkschrift, nun an das Kriegsministerium, einzureichen, die auf die militärischen Notwendigkeiten für eine größere und besser ausgestattete aerodynamische Versuchsanstalt hinwies. Die Denkschrift fand eine günstige Aufnahme und die neue Versuchsanstalt ist, wieder unter tätiger Mithilfe von Geheimrat v. *Böttlinger*, aus Heeresmitteln in den Jahren 1915/17 errichtet worden. Dies als ein Beispiel von vielen!

Die „Göttinger Vereinigung“ hat sich in den einundzwanzig Jahren ihres Bestehens aus kleinen Anfängen zu einer Gesellschaft von 48 „industriellen“ und 23 „wissenschaftlichen“<sup>4)</sup> Mitgliedern entwickelt. Ihre Ziele haben je länger je mehr auch die Anerkennung außenstehender Kreise erlangt. Hatte sich noch bei der Feier des 10-jährigen Bestehens der damalige Rektor bei seiner Begrüßungsrede veranlaßt gefühlt, zu erklären, daß er nicht im Namen aller Kollegen zu sprechen in der Lage sei, so war bei der Zwanzigjahrfeier die Zustimmung allseitig und einhellig gewesen. Bei einem von der Göttinger Vereinigung zusammen mit der Unterrichtsverwaltung unternommenen Naturwissenschaftlich-Technischen Ferienkurs für Juristen und Verwaltungsbeamte 1911 wirkte die Technische Hochschule Hannover einträchtig mit der Göttinger Universität zusammen. Die Göttinger Vereinigung darf sich auch rühmen, zum Vorbild für andere z. T. sehr viel größere und mächtigere Gesellschaften an anderen Orten geworden zu sein, die die Förderung der wissenschaftlichen Forschung und die bessere Fühlung zwischen Gelehrten und werktätiger Praxis sich zur Aufgabe gesetzt haben. Die von *Althoff* gegründete Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft steht unter diesen

Gesellschaften in vorderster Reihe. — Die von der Göttinger Vereinigung gegründeten Institute haben eine große Schaar von Schülern hervorgebracht, von denen eine Reihe heute in der Industrie wirkt, eine kleine Anzahl auch bereits akademische Lehrstühle einnimmt und Göttinger Geist, d. i. Kleinschen Geist, weiter verbreitet.

Die Schilderung von *Kleins* Tätigkeit für die Schaffung von Anknüpfungen zwischen den reinen Wissenschaften und ihren Anwendungen wäre unvollständig, wenn nicht auch der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ gedacht würde, auf deren Zustandekommen und auf deren Ausgestaltung im einzelnen *Klein* den größten Einfluß ausübte. Die Enzyklopädie erstreckt sich außer auf die reine Mathematik auch auf deren Anwendungen in Mechanik, Physik, Astronomie, Geodäsie usw., insonderheit auch auf die Grenzgebiete dieser Fächer zur Technik. Für die den Anwendungen gewidmeten Bände war *Klein* der Spiritus rector, für den sehr umfangreichen Mechanikband Redakteur. Man muß in jener Zeit, als dieses Werk im Entstehen war, die Tätigkeit von *Klein* mit erlebt haben, um zu wissen, welches ungeheure Maß von Arbeit und Energie er selbst aufgewendet hat, um das Werk zu dem zu machen, was es wirklich geworden ist. Bei der Vielartigkeit des Stoffes und der Verschiedenartigkeit der Mitarbeiter war es nicht ausgeblieben, daß der eine oder andere Artikel nach dieser oder jener Richtung unzureichend war. In vielen Fällen bestand die Rettung darin, daß ein Seminar über den Gegenstand angesetzt wurde und daß der Artikel hernach von einem jungen Gelehrten, der sich in diesem Seminar durch verständnisvolle Mitarbeit ausgezeichnet hatte, in persönlicher Bezugnahme mit *Klein* und seinem getreuen Mitarbeiter für die Enzyklopädie, Dr. *Konrad Müller*, in Ordnung gebracht wurde.

Die Enzyklopädie ist nicht nur eine Fundgrube für einen gewaltig ausgedehnten Wissensstoff geworden, sondern es sind verschiedene bis dahin kaum gekannte Anwendungsgebiete in ihr zum ersten Male zusammenhängend bearbeitet und einem weiten Leserkreis von Mathematikern und mathematisch interessierten Vertretern der Physik und Technik zugänglich gemacht. Sie ist für ihren Schöpfer ein *monumentum aere perennius* geworden. Möchte das gleiche einst auch von den Göttinger Einrichtungen für die angewandten Wissenschaften gesagt werden dürfen, deren Zukunft, wie die des ganzen Vaterlandes, zurzeit mit schwarzen Wolken verhangen ist! Möchten sie, allen Stürmen zum Trotz, sich weiter entwickeln und in späten Zeiten noch den Ruhm ihres Schöpfers künden!

4) D. h. Göttinger Professoren.

Liste der Veröffentlichungen.

A. Selbständig erschienene Veröffentlichungen, redigierte Sammelwerke, sowie Einführungsworte zu Werken anderer.

1. „Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form.“ Inauguraldiss. Bonn 1868 (Promotion am 12. Dez. 1868). Abgedr. mit Änderungen u. Zusätzen Math. Annalen 23 (1884).
2. Bearb. u. Herausgabe von „J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Zweite Abteilung.“ Mit eigenen im Vorwort besonders bezeichneten Zusätzen. Leipzig, Teubner, 1869.
3. „Vier Modelle zur Theorie der Linienkomplexe zweiten Grades.“ Köln, J. Eigel u. Sohn, 1871.
4. „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.“ Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen. Erlangen, A. Deichert, 1872. Übers. ins Französ. von Padé, Ann. de l'école norm. sup. (3) 8 (1891); ins Italien. von G. Fano, Ann. di mat. (2) 17 (1890); ins Englische von M. W. Haskell, Bull. of the New York math. soc., 2 (1893); ins Polnische von S. Dickstein, Prac. matematyczno-fizycznych 6 (1895); ins Russische von D. Sinizow, Kasan. Ges. (2) 5 u. 6 (1896); ins Ungarische von Kopp Lajos, Budapest (1897). Abgedr. Math. Ann. 43 (1893).
5. Redaktion der Math. Annalen, Mitwirkung seit Bd. 6 (1873). Übernahme der Redaktion seit Bd. 10 (1876).
6. Vorwort zu „A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie“, herausgeb. von F. Lindemann, Bd. 1, Leipzig, Teubner (1876).
7. Herausgabe von „München in naturwissenschaftlicher und medizinischer Beziehung“, Leipzig u. München (1877).
8. Herausgabe von „Amtlicher Bericht der 50. Vers. D. Naturf. u. Ärzte in München“ (1877).
9. „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale“ (VIII + 82 S.), Leipzig, Teubner, 1882. Übers. ins Englische von F. Hardcastle, Cambridge, Macmillan and Bowes (1893).
10. „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ (VIII u. 260 S.), Leipzig, Teubner, 1884. Übers. ins Englische von G. G. Morrice. London, Trübner and Co., 1888.
11. „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen“, ausgearb. u. vervollst. von R. Fricke 1 (XX u. 764 S.), 2 (XV u. 712 S.). Leipzig, Teubner, 1890 u. 92.
12. Vorwort zu „F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ “. Leipzig, Teubner, 1890. (Das Buch stellt in einigen besonders bezeichneten Teilen die Ausführung einer Vorlesung von Klein aus dem W. S. 1889–90 dar.)
13. „The Evanston Colloquium. Lectures on Mathematics“, reported by Alexander Ziwet (IX u. 109 S.). New York, Macmillan and Co., 1894. Zweite Auflage 1911. Übers. ins Französische von L. Laugel. Paris, A. Hermann, 1898 (mit weiteren Literaturnachweisen). Übers. ins Polnische von S. Dickstein. Warschau 1899.
14. Vorwort zu „M. Bôcher, Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie“. Leipzig, Teubner, 1894. (Das Buch stellt in einigen besonders bezeichneten

- neten Teilen die Ausführung einer Vorles. von Klein aus dem W. S. 1889/90 dar.)
15. „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ (V u. 66 S.), Leipzig, Teubner, 1895. Übers. ins Französ. von J. Griefß, Paris, Nony et Cie, 1896; ins Italien. von F. Giudice, Torino, Rosenberg e Sellier, 1896; ins Engl. von Beman and Smith, Boston u. London, Ginn and Cie., 1897.
  16. „R. Fricke u. F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“. 1, 1897, 2, Teil 1, 1901, Teil 2, 1911, Teil 3, 1912 (XIV u. 634 S., VIII u. 668 S.), Leipzig, Teubner.
  17. „F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels“, Heft 1 (IV u. 196 S.) 1897, Heft 2 (IV u. 315 S.) 1898, Heft 3 (IV u. 247 S.) 1903, Heft 4, bearb. u. ergänzt von F. Noether (II u. 206 S.) 1910. Leipzig, Teubner.
  18. „The mathematical theory of the top“, Princeton lectures. New York, Charles Scribners sons, 1897 (74 S.).
  19. Vorwort und Anmerkungen zu „E. J. Routh, Die Dynamik des Systeme starrer Körper“, 2 Bde. Leipzig, Teubner, 1898.
  20. „Über die Neueinrichtungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen. Mit einer Antwort auf die von Prof. Slaby in der Sitzung des preußischen Herrenhauses vom 30. März 1900 gehaltene Rede.“ Leipzig, Teubner 1900 [23 S.].
  21. Herausgabe von „C. F. Gauß' Werken“ Bd. VIII (1900), Bd. IX (1903), Bd. VII (1906), Bd. X, Teil 1 (1917). Leipzig, Teubner.
  22. Redaktion von Bd. IV der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen“, Teilband 1 (mit Vorwort), 1901–1908, Teilbd. 2 (erscheint seit 1907), Teilbd. 3, 1901–1908, Teilbd. 4, 1907–1917, Leipzig, Teubner.
  23. „F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen.“ Vorträge von E. Riecke, F. Klein, F. Schilling, E. Wiechert, G. Bohlmann, E. Meyer, Th. Descoudres während eines Göttinger Ferienkursus, mit Wiederabdruck verschiedener Aufsätze von F. Klein (VI u. 252 S.). Leipzig, Teubner 1900.
  24. Vorwort zu „F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie“. Leipzig, Teubner, 1903.
  25. „F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts“, Vorträge von O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild während eines Göttinger Ferienkursus, 1 (VII u. 190 S.), 2 (VI u. 198 S.). Leipzig, Teubner, 1904.
  26. „Über die Aufgaben und die Zukunft der philosophischen Fakultät“, Kaisergeburtstagsrede vom 27. Jan. 1904. Göttingen, Kaestner, 1904. Abgedruckt im Jahresber. der D. Math. Ver. 13, 1904, teilweise abgedruckt in der Phys. Zeitschr. 5, 1904.
  27. „Vorträge über den mathematischen Unterricht“, bearb. von R. Schimmek (IX u. 236 S.). Leipzig, Teubner, 1907.
  28. „Universität u. Schule“, Vorträge von F. Klein, P. Wendland, A. Brandl, A. Harnack auf der Vers. Deutscher Philol. u. Schulmänner zu Basel 1907 (88 S.). Leipzig, Teubner, 1907.
  29. „Wissenschaft und Technik“, Vortrag, geh. bei der Jahresfeier des Deutschen Museums in München



am 1. Okt. 1908, München, 1908. Abgedr. in der Internat. Wochenschrift 2, im Jahresber. der D. Math. Ver. 17 und in der Phys. Zeitschr. 9, 1908.

30. Vorwort zu „J. Tannery, Elemente der Mathematik“. Leipzig, Teubner, 1909.

31. „Schriften des Deutschen Unterausschusses der internationalen mathematischen Unterrichtskommission“ (Imuk). Leipzig, Teubner, und zwar:

I. Berichte und Mitteilungen. Heft 3 (S. 33—38) F. Klein u. H. Fehr, Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses, 1909. Heft 4 (S. 38—54) F. Klein u. H. Fehr, Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses, 1910.

II. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, herausg. von F. Klein. 5 Bde. in 9 Teilbänden. Bd. 1 mit einem Einführungswort von F. Klein, 1909—13. Bd. 2, 1910—13. Bd. 3 mit einem Einführungswort und einem Schlußwort von F. Klein, 1911—16. Bd. 4, 1910—15. Bd. 5 mit einem Einführungswort und einem Schlußwort von F. Klein, 1912—16.

32. „Aktuelle Probleme der Lehrerbildung“. Schriften des D. Aussch. für den math. u. naturw. Unterr., Heft 10 (IV u. 32 S.). Leipzig, Teubner, 1911.

33. F. Klein und M. Brendel (später F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger) „Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß“. Leipzig, Teubner. Hefte 1—6, 1911—1918.

34. Die Kultur der Gegenwart. III. Teil, 1. Abteilung. Die mathematischen Wissenschaften. Unter Leitung von F. Klein. Lieferung 1—3, 1912—1914.

#### B. Autographierte Vorlesungshefte,

im Kommissionsverlag von B. G. Teubner, Leipzig.

1. „Nicht-Euklidische Geometrie“, Teil 1, W. S. 1889/90 (364 S.), Teil 2, S. S. 1890 (238 S.).

2. „Höhere Geometrie“, Teil 1, W. S. 1892/93 (VI u. 567 S.), Teil 2, S. S. 1893 (IV u. 388 S.). Neudruck 1907.

3. „Riemannsche Flächen“, Teil 1, W. S. 1891/92 (254 S.), Teil 2, S. S. 1892 (262 S.). Neudruck 1906.

4. „Über die hypergeometrische Funktion“, W. S. 1893/94 (569 S.).

5. „Lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung“, S. S. 1894 (524 S.). — Neudruck von 4 und 5 im Jahre 1906.

6. „Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie“, Teil 1, W. S. 1895/96 (XI u. 391 S.), Teil 2, S. S. 1896 (354 S.). Neudruck 1907.

7. „Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“, S. S. 1901 (VIII u. 468 S.). 2. Aufl. 1907.

8. „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“, Teil 1, 1908 (VIII u. 590 S.), Teil 2, 1909 (VIII u. 515 S.). 2. Aufl. von Teil 1 (mit Zusätzen u. Änderungen) 1911, von Teil 2 1913.

Außerdem sind einzelne Vorlesungen in autorisierten Vervielfältigungen verbreitet:

Geometrische Funktionentheorie 1880—1881.

Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, I W.-S. 1890—91, II S.-S. 1891.

Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert 1914—18.

I. Teil. Die ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts.

II. Teil. Reine Mathem. bis ca. 1850. Math. Phys. bis ca. 1880.

III. Teil. Funktionentheorie von 1850 bis ca. 1900.

IV. Teil. Die Invariantentheorie der einfachen kontinuierlichen Gruppen in ihrer Bedeutung für die neueste mathematische Physik.

V. Teil. Gruppen analytischer Punkttransformationen bei Zugrundelegung einer quadratischen Differentialform.

C. Die bei F. Klein bearbeiteten Dissertationen (die Ortsangaben beziehen sich auf die promovierenden Universitäten).

1. Dickmann, J., „Über die Modifikationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3. Ordn. durch Auftreten von Singularitäten erfährt“, Göttingen, 1871.

2. Lindemann, F., „Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung“, Erlangen, 1873.

3. Weiler, A., „Über die verschiedenen Gattungen der Komplexe 2. Grades“, Erlangen, 1873.

4. Bretschneider, W., „Über Kurven 4. Ordn. mit 3 Doppelpunkten“, Erlangen, 1875.

5. Braun, W., „Die Singularitäten der Lissajouschen Stimmgabelkurven“, Erlangen, 1875.

6. Harnack, A., „Über die Verwertung der elliptischen Funktionen für die Geometrie der Kurven 3. Grades“, Erlangen, 1875.

7. Wedekind, L., „Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen“, Erlangen, 1875.

8. Rohn, K., „Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Funktionen  $p = 2$ “, München, 1878.

9. Dyck, W., „Über regulär verzweigte Riemannsche Flächen und die durch sie definierten Irrationalitäten“, München, 1879.

10. Gierster, J., „Die Untergruppen der Galoisschen Gruppe der Modulargleichung für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades“, Leipzig, 1881.

11. Hurwitz, A., „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen 1. Stufe“, Leipzig, 1881.

12. Staude, O., „Über lineare Gleichungen zwischen elliptischen Koordinaten“, Leipzig, 1881.

13. Lange, E., „Die 16 Wendebertührungspunkte der Raumkurve 4. Ordn. 1. Spezies“, Leipzig, 1882.

14. Weichold, G., „Über symmetrische Riemannsche Flächen und die Periodizitätsmoduln der zugehör. Abelschen Normalintegr. 1. Gattung“, Leipzig, 1883.

15. Dingeldey, F., „Über die Erzeugung von Kurven 4. Ordn. durch Bewegungsmechanismen“, Leipzig, 1885.

16. Fiedler, E. W., „Über eine besondere Klasse irrationaler Modulargleichungen der ellipt. Funkt.“, Leipzig, 1885.

17. Fischer, O., „Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke aufeinander mittelst algebraischer Funktionen“, Leipzig, 1885.

18. Domsch, P., „Über die Darstell. der Flächen 4. Ordn. mit Doppelkegelschnitt durch hyperellipt. Funktionen“, Leipzig, 1885.

19. Fine, H. B., „On the singularities of curves of double curvature“, Leipzig, 1886.

20. Fricke, R., „Über Systeme elliptischer Modul-funktionen von niederer Stufenzahl“, Leipzig, 1886.

21. Friedrich, G., „Die Modulargleichungen der Galoisschen Moduln der 2. bis 5. Stufe“, Leipzig, 1886.

22. Nimsch, P., „Über die Perioden der ellipt. Integrale 1. u. 2. Gattung als Funktionen der rationalen Invarianten“, Leipzig, 1886.

23. *Biedermann, P.* „Über Multiplikatorgleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Funktionen“, Leipzig, 1887.

24. *Olbriht, R.*, „Studien über die Kugel- und Zylinderfunktionen“, Leipzig, 1887.

25. *Reichardt, W.*, „Über die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperellipt. Funkt.“, Leipzig, 1887.

26. *Witting, A.*, „Über eine der Hesseschen Konfiguration der ebenen Kurve 3. Ordn. analoge Konfiguration im Raume usw.“, Göttingen, 1887.

27. *Haskell, M. W.*, „Über die zu der Kurve  $\lambda^3\mu + \mu^2\nu + \nu^3\lambda = 0$  im projektiven Sinne gehörende mehrfache Überdeckung der Ebene“, Göttingen, 1890.

28. *Schroeder, J.*, „Über den Zusammenhang der hyperelliptischen  $\sigma$ - und  $\wp$ -Funktionen“, Göttingen, 1890.

29. *Böcher, M.*, „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie“, Göttingen, 1891.

30. *White, H. S.*, „Abelsche Integrale auf singularitätenfreien, einfach überdeckten, vollständigen Schnittkurven eines beliebig ausgedehnten Raumes“, Göttingen, 1891.

31. *Thompson, H. D.*, „Hyperellipt. Schnittsysteme und Zusammenordnung der algebraischen und transzendenten Thetacharakteristiken“, Göttingen, 1892.

32. *Schellenberg, C.*, „Neue Behandlung der hypergeometrischen Funktion auf Grund ihrer Definition durch ein bestimmtes Integral“, Göttingen, 1892.

33. *Ritter, E.*, „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte 0“, Göttingen, 1892.

34. *Van Vleck, E. B.*, „Zur Kettenbruchentwicklung Laméscher und ähnlicher Integrale“, Göttingen, 1893.

35. *Schilling, F.*, „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion“, Göttingen, 1894.

36. *Glaumer, Th.*, „Über den Verlauf von Potentialfunktionen im Raume“, Göttingen, 1894.

37. *Woods, F. S.*, „Über Pseudominimalflächen“, Göttingen, 1895.

38. *Furtwängler, Ph.*, „Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren ganzzahligen, ternären, kubischen Formen“, Göttingen, 1896.

39. *Chisholm, G.*, „Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie“, Göttingen 1895.

40. *Snyder, V.*, „Über die linearen Komplexe der Lieschen Kugelgeometrie“, Göttingen 1895.

41. *Jaccottet, C.*, „Über die allgemeine Reihenentwicklung der Potentialfunktion nach Laméschen Produkten“, Göttingen 1895.

42. *Winston, M. F.*, „Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgleichung“, Göttingen 1897.

43. *Wieghardt, C.*, „Über die Statik ebener Fachwerke mit schlaffen Stäben“, Göttingen 1903.

44. *Müller, C. H.*, „Studien zur Geschichte der Mathematik Univ. Gött. i. XVIII. Jahrh.“, Göttingen 1904.

45. *Winkelmann, M.*, „Zur Theorie des Maxwell'schen Kreisels“, Göttingen 1904.

46. *Timpe, A.*, „Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen“, Göttingen 1905.

47. *Ihlenburg, W.*, „Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke“, Göttingen 1909.

48. *Behrens, W.*, „Ein der Theorie der Lavalturbine entnommenes mechanisches Problem usw.“, Göttingen 1911.

D. Abhandlungen<sup>1)</sup>

(G. N. bedeutet „Göttinger Nachrichten“, M. A. „Mathematische Annalen“).

1. „Zur Theorie der Linienkomplexe des 1. und des 2. Grades“ (Vorl. Mitt.), G. N. 1869 (datiert 4. Juni 1869, vorgel. 5. Juni 1869) [19 S.].

2. „Zur Theorie der Linienkomplexe des 1. und des 2. Grades“, M. A. 2, 1870 (dat. 14. Juni 1869) [29 S.].

3. „Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten“, M. A. 2, 1870 (dat. 4. Aug. 1869) [5 S.].

4. „Über die Abbildung der Komplexflächen 4. Ordnung und 4. Klasse“, M. A. 2, 1870 (dat. 14. Juni 1869) [2 S.].

5. (Mit *S. Lie*) „Sur une certaine famille des courbes et des surfaces“ (2 Noten), Compt. Rend. 70, 1870 (dat. 6. Juni, 13. Juni 1870) [5 und 4 S.].

6. (Mit *S. Lie*) „Über die Haupttangentialkurven der Kummerschen Fläche 4. Grades mit 16 Knotenpunkten“, Berl. Ber. 1870 (vorgel. am 15. Dez. 1870) [9 S.]. Abgedr. M. A. 23.

7. „Zur Theorie der Kummerschen Fläche und der zugehörigen Linienkomplexe 2. Grades“, G. N. 1871 (vorgel. am 18. Januar 1871) [6 S.].

8. „Über einen Satz aus der Theorie der Linienkomplexe, welcher dem Dupinschen Theoreme analog ist“, G. N. 1871 (vorgel. am 14. März 1871) [13 S.].

9. „Über die sogenannte Nichteuclidische Geometrie“ (Vorl. Mitt.), G. N. 1871 (vorgel. am 30. Aug. 1871) [15 S.]. Französ. Übers. im Bull. des scienc. mathém. et astron. (1) 2.

10. (Mit *S. Lie*) „Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“, M. A. 4, 1871 (dat. März 1871) [35 S.].

11. „Über eine geometrische Repräsentation der Resultanten algebraischer Gleichungen“, M. A. 4, 1871 (dat. Mai 1871) [13 S.].

12. „Notiz betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper“, M. A. 4, 1871 (dat. Juni 1871) [13 S.].

13. „Über die sogenannte Nichteuclidische Geometrie“, M. A. 4, 1871 (dat. 19. Aug. 1871) [53 S.]. Französ. Übersetzung in den Annales de la faculté des sc. de Toulouse II (1897).

14. „Über Liniengeometrie und metrische Geometrie“, M. A. 5, 1872 (dat. Okt. 1871) [21 S.].

15. „Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgl.“, M. A. 5, 1872 (dat. Nov. 1871) [26 S.].

16. „Über einen liniengeometrischen Satz“, G. N. 1872 (vorgel. am 2. März 1872) [12 S.]. Abgedr. M. A. 22, 1883.

17. „Über einen Satz der analysis situs“, G. N. 1872 (vorgel. am 1. Juni 1872) [8 S.].

18. „Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie“, G. N. 1872 (vorgel. am 3. Aug. 1872) [6 S.]. Abgedr. M. A. 22, 1883.

19. Besprechung von „M. Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie etc.“ (Paris 1870). Gött. gelehrte Anz. 1872 [12 S.].

<sup>1)</sup> Eine Reihe von Besprechungen in den „Fortritten der Mathematik“ für die Jahrgänge 1869 bis 1877 (Bde. 2—9), mit Kln. gezeichnet, ist nicht besonders angeführt.

20. Besprechung eines von Herrn Dr. Neesen nach Angaben von F. Klein konstruierten Modells einer Fläche 3. Ordn., G. N. 1872 (vorgel. am 3. Aug. 1872).
21. „Über die sogenannte Nicht-euklidische Geometrie II“, M. A. 6, 1873 (dat. 8. Juni 1872) [34 S.].
22. „Über Flächen 3. Ordn.“ (2 Noten), Erlanger Ber. 1873 (dat. 5. Mai und 23. Juni 1873) [6 u. 2 S.].
23. „Über eine Gleichung 12. Grades“, Erl. Ber. 1873 (dat. 12. Juli 1873) [5 S.].
24. „Übertragung des Pascalschen Satzes auf Raumgeometrie“, Erl. Ber. 1873 (dat. 10. Nov. 1873) [3 S.]. Abgedr. M. A. 22, 1883.
25. „Der allgemeine Funktionsbegriff und seine Darstellung durch eine willkürliche Kurve“, Erl. Ber. 1873 (dat. 8. Dez. 1873) [11 S.]. Abgedr. M. A. 22, 1883.
26. „Über Flächen 3. Ordn.“. M. A. 6, 1873 (dat. 6. Juni 1873) [31 S. u. 6 Tafeln].
27. „Über die Plücker'sche Komplexfläche“, M. A. 7, 1874 (dat. Okt. 1873) [4 S.].
28. Mitarbeit an „Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen“, M. A. 7, 1874 (dat. Juli 1873).
29. „Nachtrag zu dem zweiten Aufsätze über Nicht-euklidische Geometrie“, M. A. 7, 1874 (dat. Januar 1874) [7 S.].
30. „Bemerkungen über den Zusammenhang von Flächen“, M. A. 7, 1874 (dat. Febr. 1874) [9 S.].
31. „Über eine neue Art von Riemannschen Flächen“, M. A. 7, 1874 (dat. Febr. 1874) [9 S.].
32. „Weitere Mitteilung über eine neue Art von Riemannschen Flächen“, Erl. Ber. 1874 (dat. 11. Mai 1874) [5 S.].
33. „Otto Hesse“, Nachruf, Ber. über die Kgl. polyt. Schule zu München für 1874/75 [4 S.]. Franz. Übers. im *Bulletino di bibliog. e di storia delle sc. mat. etc. von Bon compagni*, 9, Roma 1876.
34. „Über eine Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve“, Erl. Ber. 1875 (dat. 13. Dez. 1875) [5 S.].
- 34a. „Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve“, M. A. 10, 1876 (dat. Januar 1876) [11 S.].
35. „Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich“, M. A. 9, 1876 (dat. Juni 1875) [26 S.].
36. „Über den Zusammenhang der Flächen“, M. A. 9, 1876 (dat. Nov. 1875) [8 S.].
37. „Über lineare Differentialgl.“, Erl. Ber. 1876 (dat. 26. Juni 1876) [4 S.]. Abgedr. M. A. 11, 1877 [5 S.]. Franz. Übers. im *Bull. des sc. mathém. et astr.* (2) 1, 1877.
38. „Weitere Untersuch. über das Ikosaeder“, Erl. Ber. 1876 (dat. 13. Nov. 1876) [14 S.].
39. „Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades“, M. A. 10, 1876 (dat. April 1876) [33 S. u. 3 Tafeln].
40. „Über eine neue Art von Riemannschen Flächen II“, M. A. 10, 1876 (dat. April 1876) [19 S.].
41. „Ist Oerstedt oder Schweigger der Entdecker des Elektromagnetismus?“, *Pogg. Ann.* 157, 1876 (dat. März 1876) [2 S.].
42. „Weitere Unters. über das Ikosaeder, II u. III“, 2 Noten, Erl. Ber. 1877 (dat. 15. Januar und 9. Juli 1877) [14 u. 4 S.].
43. „Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven 4. Gr., II“, M. A. 11, 1877 (dat. Aug. 1876) [13 S. u. 1 Tafel].
44. „Über lineare Differentialgl.“, M. A. 12, 1877 (dat. April 1877) [13 S.].
45. „Weitere Unters. über das Ikosaeder“, M. A. 12, 1877 (dat. Aug. 1877) [58 S.].
46. „Über die Gestalten der Kummer'schen Fläche“, *Amtl. Ber. der 50. Vers. D. Naturf. u. Ärzte in München* 1877 [S. 35].
47. „Über elliptische Funktionen“, ebenda [S. 104].
48. „Sull' equazione del Picoaedro nella risoluzione del' equazioni del quinto grado“, Schreiben an *Brioschi*, *Rendic. del R. Istit. Lombardo* (2) 10, 1877 (dat. 6. April 1877) [3 S.].
49. „On the transformation of elliptic functions“, *Lond. math. soc. proc.* 9, 1877/78 (vorgel. am 9. Mai 1878) [9 S.].
50. „Über Gleichungen 7. Gr.“, 2 Noten, Erl. Ber. 1878 (dat. 4. März und 20. Mai 1878) [2 u. 5 S.].
51. „Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflös. der Gleichungen 5. Gr.“, M. A. 14, 1879 (dat. Mai 1878) [62 S.].
52. „Über die Erniedrigung der Modulargleichungen“, M. A. 14, 1879 (dat. Okt. 1878) [11 S. u. 2 Tafeln].
53. „Über die Transformation 7. Ordn. der ellipt. Funkt.“, M. A. 14, 1879 (dat. Nov. 1878) [44 S. u. 1 Tafel].
54. „Sull' equazione modulari“, Schreiben an *Brioschi*, *Rendic. del R. Istit. Lomb.* (2) 8, 1879 (dat. 30. Dez. 1878, vorgel. 2. Jan. 1879) [4 S.]. Deutsche Übers. unter dem Titel „Über Multiplikatorgleichungen“, M. A. 15, 1879 [3 S.].
55. „Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom 7. u. 8. Grade“, M. A. 15, 1879 (dat. März 1879) [32 S.].
56. „Über die Transformation 11. Ordn. der ellipt. Funkt.“, M. A. 15, 1879 (dat. 15. Aug. 1879) [23 S. u. 1 Tafel].
57. „Zur Theorie der elliptischen Modulfunkt.“, *Münch. Ber.* 1879 (vorgel. am 6. Dez. 1879) [12 S.]. Abgedr. M. A. 17 [9 S.].
58. „Sulla risolvibile di 11° grado dell' equazione modulare di 12° grado“, *Trans. delle R. Acc. dei Lincei* (3) 3, 1879 (vorgel. am 4. Mai 1879) [2 S.].
59. „Sulla trasformazione dell' 11° ordine delle funzioni ellittiche“, *Rendic. del R. Istit. Lomb.* (2) 12, 1879 (vorgel. am 17. Juli 1879) [4 S.].
60. „Über unendlich viele Normalformen des ellipt. Integrals 1. Gatt.“, *Münch. Ber.* 1880 (vorgel. am 3. Juli 1880) [9 S.]. Abgedr. M. A. 17 [6 S.].
61. „On the transformation of elliptic functions“, *Lond. math. soc. proc.* 11, 1879/80 (dat. 5. Okt. 1880) [2 S.].
62. „Über die geometrische Definition der Projektivität auf den Grundgebilden der ersten Stufe“, M. A. 17, 1880 (dat. April 1880) [3 S.].
63. „Über gewisse Teilwerte der  $\Theta$ -Funktion“, M. A. 17, 1880 dat. 10. Jan. 1881) [3 S.].
64. „Über Lamé'sche Funktionen“, M. A. 18, 1881 dat. Jan. 1881) [10 S.].
65. „Über Körper, welche von konfokalen Flächen 2. Grades begrenzt sind“, M. A. 18, 1881 (dat. 14. März 1881) [18 S.].
66. „Bemerkung über Flächen 4. Ordn.“, M. A. 18, 1881 (dat. 5. Apr. 1881) [1 S.].
67. „Über die konforme Abbildung von Flächen“, M. A. 19, 1882 (dat. Okt. 1881) [2 S.].
68. „Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich“, M. A. 19, 1882 (dat. 12. Januar 1882) [4 S.].

69. „Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich, II“, *M. A.* 20, 1882 (dat. 27. März 1882 [3 S.]).
70. „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie“, *M. A.* 21, 1883 (dat. 2. Okt. 1882) [78 S. und 2 Tafeln].
71. „Über gewisse Differentialgl. 3. Ordn., Leipz. Ber. 35, 1883 (vorgel. am 29. Jan. 1883) [6 S.]. Abgedr. *M. A.* 23, 1884.
72. „Zur Theorie der elliptischen Funktionen  $n$ ter Stufe“, Leipz. Ber. 36, 1884 (vorgel. am 14. Nov. 1884) [38 S.].
73. „Neue Unters. über ellipt. Modulfunkt. der niedersten Stufen“, Leipz. Ber. 37, 1885 (vorgel. 2. März 1885) [22 S.].
74. „Über die elliptischen Normalkurven der  $N$ ten Ordnung und zugehörige Modulfunktionen  $N$ ter Stufe“, Leipz., Abhandl. 13, 1885 (dat. 10. April 1885) [66 S.].
75. „Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Funktionen“, *M. A.* 26, 1886 (dat. 17. Sept. 1885) [10 S.].
76. „Über Konfiguration, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind“, *M. A.* 27, 1886 (dat. 28. Sept. 1885) [37 S.].
77. „Über hyperelliptische Sigmafunktionen“, *M. A.* 27, 1886 (dat. 10. April 1886) [34 S.].
78. „Über Gleichungen 6. u. 7. Grades“, *M. A.* 28, 1887 (dat. Okt. 1886) [34 S.].
79. „Zur geometrischen Deutung des Abelschen Theorems der hyperelliptischen Integrale“, *M. A.* 28, 1887 (dat. Okt. 1886) [28 S.].
80. „Zur Theorie der hyperelliptischen Funktionen beliebig vieler Argumente“, *G. N.* 1887 (vorgel. am 5. Nov. 1887) [7 S.].
81. „Sur la resolution par les fonctions hyperelliptiques de l'équation du 27ième degré, de laquelle depend la détermination des 27 droites d'une surface cubique“, Schreiben an *C. Jordan*, Journ. de mathém. (4) 4, 1888 (dat. 22. Sept. 1887) [4 S.].
82. „Über irrationale Kovarianten“, *G. N.* 1888 (vorgel. am 5. Mai, dat. 15. März 1888) [4 S.].
83. „Über hyperelliptische Sigmafunktionen II“, *M. A.* 32, 1888 (dat. 24. März 1888) [30 S.].
84. „Zur Theorie der Abelschen Funktionen, I“, *G. N.* 1889 (vorgel. am 2. März 1889) [12 S.].
85. „Zur Theorie der Abelschen Funktionen, II“, *G. N.* 1889 (vorgel. am 1. Juni 1889, dat. 12. Mai 1889) [5 S.].
86. „Formes principales sur les surfaces de Riemann“, *Compt. Rend.* 1889 (dat. 21. Januar 1889) [4 S.].
87. „Des fonctions theta sur la surface générale de Riemann“, *Compt. Rend.* 1889 (dat. 11. Febr. 1889) [4 S.].
88. „Über die konstanten Faktoren der Thetareihen für  $p=3$ “, *London math. soc. proc.* 20, 1888/89 (vorgel. am 11. April 1889) [3 S.].
89. „Zur Theorie der Abelschen Funktionen“, *M. A.* 36, 1890 (dat. 24. Sept. 1890) [83 S.].
90. „Zur Theorie der Laméschen Funktionen“, *G. N.* 1890 (vorgel. am 1. März 1890) [11 S.].
91. „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“, *G. N.* 1890 (vorgel. am 2. August 1890) [1 S.].
- 91 a. „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“, vorgetr. Sept. 1890. Verhandl. der Ges. D. Naturf. u. Ärzte in Bremen 1890 II, S. 4.
92. „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie“, *M. A.* 37, 1890 (dat. 20. August 1890 [29 S.]).
93. „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“, *M. A.* 37, 1890 (dat. 5. Sept. 1890) [18 S.].
94. „Über Normierung der linearen Differentialgl. 2. Ordn.“, *M. A.* 38, 1891 (dat. 23. Dezember 1890 [9 S.]).
95. „Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgl.“, *M. A.* 40, 1892 (dat. Sept. 1891) [5 S.].
96. „Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereiches“, *M. A.* 40, 1892 (dat. Sept. 1891) [10 S.].
97. „Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebr. Gleichungen“, Katalog math. Modelle, herausg. von *W. Dyck*, München 1892 (dat. 9. Juni 1892) [13 S.].
98. „Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik“, vorgetr. Sept. 1891. Verh. d. Ges. D. N. u. Ä. in Halle 1891. Abgedr. im Jahresb. der D. Math. Ver. 1, 1892 [2 S.].
99. „Über Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Funktionen“, *G. N.* 1892 (vorgel. am 7. Mai, dat. 20. April 1892) [3 S.].
100. „Über Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der  $\varphi$ “, *M. A.* 42, 1893 (dat. 2. Sept. 1892) [29 S.].
101. „Über die Komposition der binären quadr. Formen“, *G. N.* 1893 (vorgel. am 14. Jan. 1893) [4 S.].
102. „Zur Theorie der algebraischen Funktionen“, Jahresb. der D. Math. Ver. 2, 1893 [2 S.].
103. „Mathematik“, in „*Leavis*, die deutschen Universitäten“, Berlin, A. Ascher u. Co., 1893 [10 S.].
104. „The present state of mathematics“, *Mathem. papers read at the intern. math. congress, Chicago, 1893.* New York, Macmillan and Co., 1896 [4 S.]. Zuerst ersch. in „*The Monist*“, herausg. von *Carus*, 4, Chicago 1893.
105. „Über die Entwicklung der Gruppentheorie während der letzten 20 Jahre“, ebenda, S. 136.
106. „Autogr. Vorlesungshefte“, Referat über die unter B, 2, 3 und 4 gen. Vorles. *M. A.* 45, 1894 (dat. März 1894) [13 S.].
107. „Autogr. Vorlesungshefte“, Referat über die unter B, 5 gen. Vorles., *M. A.* 46, 1895 (dat. 16. Sept. 1894) [14 S.].
108. „Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathem.“, Rede, geh. am 26. Sept. 1894, *Tagebl. der 66. Vers. D. Naturf. u. Ärzte in Wien 1894*, S. 212 bis 221 und in den Verhandl. der Gesellsch. D. Naturf. u. Ärzte 1894, allgem. Teil. Abgedr. Jahresber. der D. Math. Ver. 4, 1894 [17 S.]. Wiederabgedr. *Zeitsch. f. den math. u. naturw. Unterr.* 26, 1895. Ital. Übers. *Annali di matem.* (2) 23, 1895. Engl. Übers. *Amer. math. soc. Bull.* 1, 1895.
109. „Über die zu einem algebr. Gebilde gehörenden nirgends singulären linearen Differentialgl. der 2. Ordnung“, Vorgetr. Sept. 1894. Verh. d. Ges. D. N. u. Ä. in Wien, II. Abgedr. im Jahresb. d. D. Math. Ver. 4, 1897 [2 S.].
110. „Über den math. Unterr. an der Univers. Göttingen im bes. Hinblick auf die Bedürfnisse der Lehramtskand.“ *Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr.* 26, 1895 (vorgetr. am 4. Juni 1895) [7 S.].
111. „Über die Beziehung der neueren Mathem. zu den Anwendungen“, *Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr.* 26, 1895 (Antrittsrede, geh. am 25. Okt. 1895 in Leipzig).

112. „Über eine geometrische Auffassung der gewöhnl. Kettenbruchentw.“, G. N. 1895 (vorgel. am 19. Okt. 1895 [3 S.]). Franz. Übers. *Nouv. annales des math.* (3) 15, 1896.
113. „Zur Theorie der gewöhnl. Kettenbrüche“, Vorgetr. Sept. 1895, Verh. d. Ges. D. N. u. Ä. in Lübeck II, abgedr. im Jahresb. der D. Math. Ver. 4, 1897 [2 S.].
- 113 a. „Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen“, Vortrag geh. am 6. Dez. 1895 im Hannoverschen Bezirksverein des Ver. Deutscher Ingenieure. *Zeitschr. des Ver. D. Ing.* 1896, S. 102 ff. Abgedr. in *Klein-Riecke*, „Über angewandte Mathem. u. Phys. usw.“.
114. „Über die Arithmetisierung der Mathem.“, G. N. (geschäftl. Mitt.) 1895 (Rede, geh. am 2. Nov. 1895) [10 S.]. Abgedr. *Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr.* 27, 1896. Ital. Übers. *Palermo Rendic.* 10, 1891. Engl. Übers. *Amer. math. soc. bull.* 2, 1896. Franz. Übers. *Nouv. annales des mathem.* (3) 16, 1897.
115. „Über die Bewegung des Kreisels“, G. N. 1896 (vorgel. am 11. Jan. 1896) [2 S.]. Französ. Übers. *Nouv. annales des math.* (3) 15, 1896.
116. „Stability of the sleeping top“, *Amer. math. soc. bull.* 3, 1897 (vorgetr. Princeton am 17. Okt. 1896) [4 S.]. Franz. Übers. *Nouv. ann. des math.* (3) 15, 1897.
117. „Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der math. Lehramtskand.“ (vorgetr. 20. April 1896), *Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr.* 27, 1896 [6 S.]. Abgedr. in der *Zeitschr. d. Ver. D. Ing.* 1896, S. 987 ff. und in „*Klein-Riecke*, Über angewandte Math. und Phys. usw.“.
118. „Über die analytische Darstellung der Rotationen bei Problemen der Mechanik“ (vorgetr. Sept. 1896), Verh. d. Ges. D. N. u. Ä. in Frankfurt 1896, abgedr. im Jahresb. der D. Math. Ver. 5, 1901, S. 87—88.
119. „Über einen Satz aus der Theorie der endlichen (diskontinuierlichen) Gruppen lin. Substitut. beliebig vieler Veränderl.“ (Mitt. eines Satzes von Moore) vorgetr. Sept. 1896, Verh. d. Ges. D. N. u. Ä. in Frankfurt 1896, abgedr. im Jahresb. der D. Math. Ver. 9, 1901, S. 57.
120. „Autograph. Vorlesungshefte“, Refer. über die unter B. 6 gen. Vorl., M. A. 48, 1897 (dat. August 1896) [24 S.].
121. „Ernst Ritter“, Nachruf. Jahresbericht der D. Math. Ver. 4, 1897 (dat. 25. Sept. 1895).
122. „Erwerbung neuer auf B. Riemann bezügl. Manuskripte“, G. N. 1897 (vorgel. am 31. Juli 1897) [2 S.].
123. „Gutachten betr. den 3. Bd. der Theor. der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewskypreises“, *Nachr. der physiko-mathemat. Gesellsch. der Univers. Kasan* (2) 8, 1897. Abgedr. M. A. 50, 1898 [18 S.].
124. „Über den Stand der Herausg. von Gauß' Werken“, *Berichte* 1 bis 12, G. N. 1898, 99, 1900, 01, 02, 04, 06, 10, 11, 13, 15, 17. Franz. Übers. von Ber. 1 und 2 *Bull. des sc. mat. et astr.* 22, 1898 und 23, 1899. Alle Ber. abgedr. M. A. 50, 53, 55, 57, 61, 63, 69, 71, 74, 77, 78.
125. „Universität u. Technische Hochschule“ (vorgetr. am 19. Sept. 1898), Verh. d. Ges. D. N. u. Ä. in Düsseldorf 1898, wiederabgedr. im Jahresb. d. D. Math. Ver. 7, 1899 [12 S.] und in „*Klein-Riecke*, Über angewandte Mathem. u. Physik usw.“ 1900.
126. „Zum Gedächtnis Ernst Scherings“, Jahresb. der D. Math. Ver. 6, 1899 [2 S.].
127. „Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado“, *Rendic. acc. dei Lincei* (5) 8, 1899 (Schreiben an *Castelnuovo*, vorgel. am 2. April 1899) [1 S.].
128. „Über Aufgabe und Methode des mathem. Unterr. an den Universitäten“ (vorgetr. Sept. 1898), Verh. der Ges. D. N. u. Ä. in Düsseldorf 1898, wiederabgedr. im Jahresb. der D. Math. Ver. 7, 1899 [13 S.].
129. „Über Neueinrichtungen für Elektrotechnik u. allgem. techn. Physik an der Univ. Göttingen“, *Phys. Zeitschr.* 1, 1899 (dat. Anfang November 1899). Abgedr. in A. 20, „Die physikalischen Institute der Univ. Göttingen“ Leipzig, 1906, S. 189—193, ferner in „*Klein-Riecke*, Über angew. Math. u. Phys. usw.“, 1900.
130. „Bemerkungen zu Referaten von Weber und Hauck über die angew. Math. in der Prüfungsordnung“ (vorgetr. Sept. 1899), Verh. der Ges. D. N. u. Ä. in München 1899, wiederabgedr. im Jahresb. der D. Math. Ver. 8, 1900, S. 118—119.
131. „Gauß' wissenschaftl. Tagebuch“, mit Anmerk. herausg. von F. Klein. *Festschr. z. Feier des 150-jährigen Bestehens der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, Berlin 1901, abgedr. M. A. 57, 1903.
132. „Über die Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften“ (Auszug aus einem Vortrage vom 19. Sept. 1900), Verh. der Ges. D. N. u. Ä. in Aachen 1900, wiederabgedr. im Jahresb. der D. Math. Ver. 9, 1901 [7 S.]. u. in der *Phys. Zeitschr.* 2, 1901.
133. „Gutachten betreffend die Beneke-Preisauflage“, G. N. 1901 (geschäftl. Mitt.) [8 S.]. Teilweise abgedr. M. A. 55 [6 S.].
134. „Über das Brunsche Eikonall“, *Zeitschr. für Math. u. Phys.* 46, 1901 [4 S.].
135. „Räumliche Kollineationen bei optischen Instrumenten“, *Zeitschr. für Math. u. Phys.* 46, 1901 [7 S.].
136. „Der Unterricht in der Mathematik“, in „*Levis*, Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen“, 1902 [11 S.]. Abgedr. in „*Klein-Riecke*, Neue Beiträge zur Frage des mathem. u. phys. Unterr.“ 1904, desgl. im Jahresb. d. D. Math. Ver. 13, 1904.
137. „Über den mathemat. Unterr. an den höheren Schulen“, Jahresb. der D. Math. Ver. 11, 1902 [14 S.]. Abgedr. in „*Klein-Riecke*, Neue Beiträge usw.“ 1904.
138. „Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball“, *Zeitschr. für Math. u. Phys.* 47, 1902 [29 S.]. (dat. 3. Sept. 1901). Abgedr. mit Zusätzen M. A. 62, 1906.
139. „Über das Porträt des 26-jährigen Gauß“, G. N. (geschäftl. Mitt.) 1903 [7 S.].
140. „Zur Besprechung des math.-naturw. Unterr. auf der nächsten Naturforschervers. zu Breslau“, *Verhandl. d. Gesellsch. D. Naturf. u. Ärzte zu Kassel* 1903, Leipzig 1904, S. 152—155, 169. Abgedr. Jahresb. der D. Math. Ver. 13, 1904 [3 S.]. Wiederabgedr. in „*Klein-Riecke*, Neue Beiträge usw.“ 1904.
141. „Mathematik, Physik, Astronomie“ in „*Levis*, Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich“ 1, 1904 [13 S.]. Abgedr. Jahresb. der D. Math. Ver. 13, 1904, desgl. *Phys. Zeitschr.* 5, 1904.
142. (Mit *Wiegardt*) „Über Spannungsfächen und reziproke Diagramme mit besonderer Berücksichtigung der Maxwell'schen Arbeiten“, *Archiv der Math. u. Phys.* (3), 8, 1905 (dat. 10. Febr. 1904) [35 S.].
143. „Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite“ (vorgetr. am 9. August 1904), *Verhandl. der 3. intern. Mathem.-Kongr. in Heidelberg*, Leipzig, Teubner 1905 [2 S.].

144. „Bemerkungen zum mathem. u. naturw. Unterr.“, Verhandl. d. Gesellsch. D. Naturf. u. Ärzte in Breslau 1904, Teil 1, Leipzig 1905 [14 S.] (dat. 22. Sept. 1904). Abgedr. Jahresber. der D. Math. Ver. 14, 1905, desgl. Phys. Zeitschr. 5, 1904, desgl. in „Klein-Schimmack, Vorträge über den math. Unterr. usw.“ 1907.
145. „Probleme des mathem.-physikal. Hochschulunterricht.“, Jahrb. der D. Math. Ver. 14, 1905 (dat. Sept. 1905) [15 S.]. Französ. Übers. Enseignement mathém. 8, 1908. Abgedr. in „Klein-Schimmack, Vorträge über mathem. Unterr. usw.“ 1907.
146. „Über die Auflösung der allg. Gleichungen 5. und 6. Grades“, Journ. f. reine u. angew. Math. 129, 1905 [24 S.]. Abgedr. M. A. 61, 1905 (dat. 22. März 1905).
147. „Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Iko-saedergleichung durch Wurzelziehen“, M. A. 61, 1905 (dat. 26. August 1905) [3 S.].
148. „Zur Geschichte der Göttinger Vereinigung“, in „Die physikalischen Institute der Univers. Göttingen“, Festschr. der Gött. Vereinigung zur Förderung der angew. Phys. u. Mathem., Leipzig, Teubner, 1906, S. 189 ff.
149. „Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgl. 2. Ordnung“, M. A. 64, 1907 (dat. April 1907) [22 S.].
150. „Über den Zusammenhang zwischen dem sogen. Oszillationstheoreme der lin. Differentialgl. und dem Fundamentaltheoreme der automorphen Funktionen (vorge-tr. 16. Sept. 1907), Verh. der Ges. D. N. u. A. in Dresden 1907, wiederabgedr. im Jahrb. der D. Math. Ver. 16, 1907, S. 537.
151. „Reformvorschläge, unterbreitet der Naturforschervers. zu Dresden 1907“, Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr. 38, 1907, S. 401 ff. Franz. Übers. (im Auszuge) Enseignement mathém. 10, 1908.
152. (Mit Greenhill und Fehr) „Intern. mathem. Unterrichtskomm. (Imuk). Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan“ (dat. Okt. 1908), Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr. 39, 1908, S. 446—454 und Enseignement mathém. 10, 1908.
153. „Die Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Phys. u. Math.“ (Festrede geh. 22. Febr. 1908), Festbericht zum 10-jährigen Bestehen der Vereinigung. Abgedr. Jahresbericht der D. Math. Ver. 17, 1908 [11 S.] und in der Phys. Zeitschr. 9, 1908.
154. „Die Einrichtungen zur Förderung der Luftschiffahrt an der Univers. Göttingen“ (Auszug aus einem Vortrage vom 28. Jan. 1909), Jahrb. der D. Mathem. Ver. 18, 1909 [3 S.]. Abgedr. Illustr. aeronaut. Mitteilungen 1909. Wiederabgedr. Phys. Zeitschrift 10, 1909.
155. „Über Selbstspannungen ebener Diagramme“, M. A. 67, 1909 (dat. 31. März 1909) [12 S.].
156. „Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze“, Zeitschr. für Math. u. Phys. 58, 1910 (dat. 17. April 1909) [6 S.].
157. „Zur Beratung des Kultusetats im Preuß. Herrenhause“ (Rede geh. 27. Mai 1910), Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr. 41, 1910, S. 386 ff.
158. „Wissenschaftl. Vorbereitungskurse für Mittelschullehrer“, Pädagog. Blätter 39, 1910 u. Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr. 41, 1910, S. 417 ff.
159. „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe“ (Vortr. geh. 10. Mai 1910), Jahrb. der D. Math. Ver. 19, 1910 [20 S.]. Abgedr. Phys. Zeitschr. 12, 1911.
160. „Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten“, Zeitschr. für Math. u. Phys. 58, 1910 (dat. 20. August 1909) [4 S.].
161. „Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume“, Zeitschr. für Math. u. Phys. 58, 1910 [5 S.].
162. „Vortrag betreffend automorphe Funktionen“ (Histor. Einleit. zu den Referaten von Brouwer, Koebé, Bieberbach und Hilb, vorge-tr. 27. Sept. 1911), Verh. der Ges. D. N. u. A. in Karlsruhe 1911, wiederabgedr. im Jahrb. der D. Math. Ver. 21, 1912, S. 153 ff.
163. „Bericht über den heutigen Zustand des mathem. Unterr. an der Univers. Göttingen“ (ausgearb. Mitte August 1914), Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterr. 46, 1915 [10 S.].
164. „Zu Hilberts erster Note über die Grundlage der Physik“, G. N. 1917 (erschienen 1918). (Aus einem Briefwechsel zwischen Klein und Hilbert, vorgel. am 25. Januar 1918) [14 S.].
165. „Festrede bei der Feier des 20-jährigen Bestehens der Göttinger Vereinigung“, Festbericht zum 20-jähr. Bestehen der Vereinig. 1918 [13 S.], wiederabgedr. im Jahrb. d. D. Math. Ver. 27, 1919.
166. „Bericht über eine Reihe von Vorträgen über die Einsteinsche Gravitationstheorie in der Gött. mathem. Gesellsch. (geh. im S. S. 1918), Jahrb. der D. Math. Ver. 27, 1918 [4 S.]. Abgedr. (auszugsweise) in den Verh. der Amsterd. Akad. vom 26. Okt. 1918.
167. „Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie“, G. N. 1918 (vorgel. am 19. Juli 1918) [19 S.].
168. „Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt“, G. N. 1919 (vorgel. am 6. Dez. 1918 [30 S.].
- Außerdem Reden und Referate über Unterrichtsfragen im Preußischen Herrenhause von 1908 an, im stenographischen Bericht über die Verhandlungen.