Lense

Überreicht vom Verfasser

Hans Hahn †

Von

K. Mayrhofer in Wien

Aus den Monatsheften für Mathematik und Physik, 41. Band, 2. Heft

Leipzig 1934
Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

Hans Hahn †

Von K. Mayrhofer in Wien.

Am 24. Juli 1934 ist das langjährige Redaktionsmitglied der „Monatshefte für Mathematik und Physik“ Dr. Hans Hahn, o. Professor der Mathematik an der Universität in Wien, an den Folgen einer Krebsoperation im Alter von 55 Jahren plötzlich gestorben.

Hans Hahn wurde am 27. September 1879 als Sohn des Hofrates Ludwig Benedikt Hahn in Wien geboren. Er absolvierte das Gymnasium im 19. Bezirk in seiner Vaterstadt und bezog im Herbst 1898 die juridische Fakultät der Universität in Wien. Bereits nach einem Jahr entsagte er den juridischen Studien und wandte sich der Mathematik zu. Im Studienjahr 1899/1900 besuchte er die mathem.-naturw. Fakultät der Universität in Straßburg, das nächste Semester verbrachte er an der Universität München und kehrte im Sommer 1901 an die Universität Wien zurück, wo er im Juli 1902, am Ende seines achten Semesters, zum Doktor der Philosophie promoviert wurde. In den beiden folgenden Jahren, die er teils in Wien, teils in Göttingen verbrachte, verfaßte er bereits mehrere mathematische Publikationen und setzte daneben seine Fachausbildung durch Besuch von Vorlesungen und Mitarbeit in Seminaren bei Boltzmann, v. Escherich, Mertens und Wirtinger in Wien und ebenso bei Hilbert, Klein und Minkowski in Göttingen fort. Im Frühjahre 1905 wurde er als Privatdozent für Mathematik an der Universität Wien bestätigt; als Habilitationsschrift hatte er eine Arbeit in den Mathem. Annalen Bd. 58 *„Bemerkungen zur Variationsrechnung“* vorgelegt. Im Winter-Semester 1905/06 supplierte Hahn an der Universität Innsbruck, wo infolge der Erkrankung von O. Stolz eine Lehrstelle frei war. Nach einigen Dozentenjahren in Wien wurde er im Herbst 1909 zum Extraordinarius an der Universität Czernowitz ernannt. Er nahm 1915 am Kriege teil, wurde schwer verwundet und wegen seiner Haltung ausgezeichnet. 1916 wurde er als Extraordinarius nach Bonn berufen und 1917 dort zum Ordinarius ernannt. Im Frühjahre 1921 kehrte er als o. Professor an die Universität Wien zurück, wo er bis zu seinem Tode wirkte.

Hahn war seit 1921 korr. Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien, ferner Ehrenmitglied der Calcutta Mathematical Society, im Jahre 1931/32 Ausschußmitglied der Deutschen Mathematiker Vereinigung und wiederholt Vorstandsmitglied der Mathem. Gesellschaft in Wien; ferner war er Mitglied der Staatsprüfungskommission für Mittelschulen und langjähriges Mitglied des Wiener Stadtschulrates. — Im Jahre 1921 wurde er durch Verleihung des R. Lieben-Preises von der Akademie der Wissenschaften in Wien ausgezeichnet.

Mit Hahn ist ein starkes mathematisches Talent, ein unermüdlicher Arbeiter und hervorragender Lehrer aus der Vollkraft seines Wirkens jäh gerissen worden. Bis zur letzten Stunde vor jener unglücklichen Operation, die an Stelle eines geplanten Landaufenthaltes unerwartet notwendig wurde, stand er mitten im Institutsbetriebe, an dem er 13 Jahre hindurch mitgewirkt hatte. Seine konzilianten Formen bei aller Energie auch eine befriedigende Erledigung solcher Angelegenheiten, in denen Meinungsverschiedenheiten zu Tage traten. Seine Vorlesungen waren bis zur letzten Stunde, etwa zwei Wochen vor seinem Tode, in gewohnter Weise auf das genaueste vorbereitet und bei möglichster Abstraktion in vollendetem Stile vorgetragen. Neben dem Unterricht in Vorlesungen, Seminaren und Übungen gab Hahn, dessen Wissen ausnehmend umfassend war, viele Anregungen und Ratschläge für selbständige Arbeiten, sodaß auf seine Veranlassung insbesonders eine Anzahl von Dissertationen zustande kam und auch auswärtige Gäste sich gerne unter Hahns Leitung betätigten.

Trotz vielseitiger und umfangreicher Forschungen aus der Mathematik hatte Hahn größtes Interesse für Philosophie, insbesonders für die Stellung, welche Logik und Mathematik im Gesamtwissen einnehmen. Seine philosophischen Ansichten, die er in zahlreichen Vorträgen und Debatten in der scharfsinnigsten Weise vertrat, standen denen von B. Russell und L. Wittgenstein nahe und können durch folgende Stellen aus Hahns Schriften angedeutet werden: „Wir glauben, daß nur die Erfahrung, nur die Beobachtung uns Kenntnis vermittelt von den Tatsachen, die die Welt bilden, während alles Denken nichts ist als tautologisches Umformen. — Mit dieser Auffassung des Denkens stehen wir im Gegensatz nicht nur zu Rationalismus und Dualismus, sondern auch zur Auffassung einiger Empiristen, die glaubten, Logik (und Mathematik) aus der Erfahrung herleiten zu können, indem sie lehrten, die Sätze der Logik und der Mathematik drückten Erfahrungstatsachen aus — nicht anders als etwa die Sätze der Physik — nur daß es sich dabei um besonders häufig gemachte Erfahrungen handle,

wodurch diese Sätze einen besonders hohen Grad von Sicherheit erlangt hätten." („*Die Bedeutung der wissenschaftlichen Weltauffassung, insbesondere für Mathematik und Physik*", Erkenntnis **1**, 1930, S. 97.) Hinsichtlich Logik und Mathematik sagt Hahn weiters: „Die Logik handelt keineswegs von sämtlichen Gegenständen, sie handelt überhaupt nicht von irgendwelchen Gegenständen sondern sie handelt nur von der Art, wie wir über die Gegenstände sprechen; die Logik entsteht erst durch die Sprache". („*Logik, Mathematik und Naturerkennen*", Einheitswissensch. Heft 2, 1933, S. 10.) Die Sätze der Logik (die von denen zu unterscheiden sind, die durch die Erfahrung gegeben werden und wirklich etwas über Gegenstände aussagen) heißen tautologisch. „Die Sätze der Mathematik sind von ganz derselben Art, wie die Sätze der Logik: sie sind tautologisch, sie sagen gar nichts über die Gegenstände aus, von denen wir sprechen wollen, sondern sie handeln nur von der Art, wie wir über diese Gegenstände sprechen wollen". (Ibidem S. 17.)

Die philosophischen Publikationen Hahns sind im Literaturverzeichnis aufgezählt, über seine mathematischen wird im folgenden ein knapper Überblick gegeben. Die drei wichtigsten Gruppen sind: Variationsrechnung, Mengenlehre einschließlich mengentheoretischer Geometrie und Reelle Funktionen; die Theorie der reellen Funktionen war sein Hauptarbeitsgebiet in den letzten Jahren vor seinem Tode.

Variationsrechnung. Hahns erste Publikation „*Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale*" (Monatsh. **14**, 1903) schließt unmittelbar an Arbeiten von G. v. Escherich an und bezieht sich auf das folgende Variationsproblem: es sind $n+1$ Funktionen $y_0, y_1 \ldots y_n$ von t so zu bestimmen, daß sie für $t=t_0$ und $t=t_1$ gegebene Werte annehmen, für $t_0 \leq t \leq t_1$ die Gleichungen

$$\varphi_1(y_0, \ldots, y_n)=0, \ \ldots \ \varphi_\mu(y_0, \ldots, y_n)=0,$$
$$\varphi_{\mu+1}(y_0, \ldots, y_n, y_0', \ldots, y_n')=0, \ \ldots \ \varphi_m(y_0, \ldots, y_n, y_0', \ldots, y_n')=0$$
$$(0 \leq \mu \leq m \leq n)$$

erfüllen und das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} f(y_0, \ldots, y_n, y_0', \ldots, y_n')\, dt$$

zu einem Extremum machen; dabei genügen f, φ_i, und die gesuchten Funktionen geeigneten Voraussetzungen. Nachdem G. v. Escherich in mehreren Arbeiten notwendige Bedingungen für ein Extremum im Falle $\mu=0$ durch Betrachtung der zweiten Variation angegeben hatte, erweitert Hahn diese Resultate auf den Fall $\mu \neq 0$ und untersucht („*Bemerkungen zur Variationsrechnung*", Math. Ann. **58**, 1904), wie weit sie sich auf andere Varationsprobleme, insbesonders auf die isoperimetrischen, übertragen lassen.

In der Arbeit *„Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung“* (Monatsh. **14**, 1903) wird im Falle $\mu=0$ gezeigt, daß man, von einem Ausnahmsfalle abgesehen, bei der klassischen Multiplikatorenmethode nur einmalige stetige Differenzierbarkeit der gesuchten Lösungen nach einem geeigneten Parameter zu verlangen braucht, woraus dann die Existenz der zweiten Ableitungen schon folgt, während dies vorher eigens vorausgesetzt werden mußte. Später zeigt er (*„Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung“*, Math. Ann. **63**, 1907), wie das inzwischen von D. Hilbert mitgeteilte Verfahren zur Aufstellung der Lagrangeschen Gleichungen, das zweimalige Differenzierbarkeit der Lösungen voraussetzt, modifiziert werden kann, sodaß für dieses Verfahren nur die Existenz stetiger Ableitungen der gesuchten Lösungen vorauszusetzen ist; in derselben Arbeit wird für $n+1=2$, $\mu=0$ die Frage behandelt, ob es außer den durch die Lagrangeschen Gleichungen gelieferten Lösungen noch andere geben kann, was bei weitgehenden Voraussetzungen über die Lösungen nicht der Fall ist.

Anschließend an ein Verfahren von A. Kneser wird in der Arbeit *„Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung“* (Monatsh. **17**, 1906) eine sehr einfache Beweismethode für diesen Satz[1]) entwickelt, die in das bekannte Lehrbuch von O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (1908), aufgenommen wurde. Hahn zeigt auch, daß der Osgoodsche Satz auf fast alle Probleme der Variationsrechnung, die sich mit einfachen Integralen beschäftigen, verallgemeinert werden kann und beweist in den beiden späteren Arbeiten *„Allgemeiner Beweis des Osgoodschen Satzes der Variationsrechnung für einfache Integrale“* (Weber-Festschr. 1912) und *„Ergänzende Bemerkung zu meiner Arbeit über den Osgoodschen Satz in Band 17 dieser Zeitschrift“* (Monatsh. **24**, 1913) die Giltigkeit des Satzes bei geringeren Voraussetzungen.

[1]) Der Osgoodsche Satz überträgt folgenden Sachverhalt auf das einfachste Variationsproblem: ist $f(x_1,\ldots,x_n)$ in einer Umgebung U_0 von p_0 $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ stetig und gilt für die von p_0 verschiedenen Punkte aus U_0

$$f(x_1,\ldots,x_n)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)>0,$$

so gibt es in U_0 eine Umgebung U_0' von p_0 und ferner ein $\varepsilon>0$, sodaß für alle Punkte von U_0 außerhalb von U_0' die Beziehung

$$f(x_1,\ldots,x_n)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)>\varepsilon$$

gilt.

Im Falle $\mu=0$ sei y_0 als unabhängig Veränderliche ausgezeichnet und durch x ersetzt. Liefert $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ ein Extremum, so seien (bei geeigneten Voraussetzungen) λ_i $(i=1,\ldots,m)$ zugehörige Multiplikatoren. Setzt man

$$f+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i=F,$$

so wurde von A. Clebsch und G. v. Escherich durch Transformation der zweiten Variation auf die „reduzierte“ Form gezeigt, daß für die $y_k(x)$ folgende notwendige Bedingung gilt: die Form

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i\,\partial y'_k}\xi_i\,\xi_k,$$

in der die Variablen ξ der Bedingung

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k}\xi_k=0 \qquad (i=1,\ldots,m$$

unterworfen sind, darf im zugrunde liegenden x-Intervalle nicht verschiedener Vorzeichen fähig sein. Hahn löst (*„Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung“*, Monatsh. **17**, 1906) die von G. v. Escherich angegebene Aufgabe, diese notwendige Bedingung abzuleiten, ohne erst jene Transformation auszuführen, indem er den Weg verfolgt, auf dem Weierstraß zu seiner E-Funktion gelangte. In einer späteren Arbeit *„Über den Zusammenhang zwischen den Theorien der zweiten Variation und der Weierstraßschen Theorie der Variationsrechnung“* (Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo **29**, 1910) zeigte er, wie man jene reduzierte Form der zweiten Variation aus der sogenannten Weierstraßschen Formel, die die Integraldifferenz mittels der E-Funktion darstellt, herleiten kann.

O. Bolza hatte 1906 eine neue notwendige Bedingung für ein Minimum des Integrals $\int f(x,y,y')\,dx$ angegeben. Hahn zeigt (*Über Bolzas fünfte notwendige Bedingung in der Variationsrechnung“*, Monatsh. **20**, 1909), daß auch diese neue Bedingung zusammen mit vier andern von O. Bolza zusammengestellten für ein Minimum nicht hinreicht.

Ist $\mu=0$ und $y_0=x$ die unabhängig Veränderliche und unterliegen die Anfangs- und Endpunktkoordinaten irgendwelchen Bedingungen, so fand Hahn (*„Über Extremalenbogen, deren Endpunkt zum Anfangspunkt konjugiert ist“*, Ak. Ber. Wien, **118**, 1909 und *„Über Variationsprobleme mit variablen Endpunkten“*, Monatsh. **22**, 1911), daß ein Extremalenbogen, der ein schwaches Extrem liefert, zugleich ein starkes liefert, wenn die E-Funktion in seiner Umgebung einerlei Zeichens ist. Dieser Satz ist insofern wichtig, als es viel einfacher ist, ein schwaches Extremum nachzuweisen als ein starkes, weshalb durch ihn auch mit einem Schlage gewisse Schwierigkeiten bei Variationsproblemen mit variablen Endpunkten beseitigt wurden, zu deren Überwindung manche Autoren Spezialuntersuchungen angestellt hatten.

In der Arbeit *„Über räumliche Variationsprobleme“* (Math. Ann. **70**, 1911) wird eine auf L. Scheeffer zurückgehende Methode für den dreidimensionalen Fall mit $y_0 = x$ als unabhängig Veränderliche und ohne Nebenbedingung ausgearbeitet. Hahn zeigt, wie die Frage, ob ein Extremalenbogen, dessen Endpunkt zum Anfangspunkt konjugiert ist, ein Minimum liefert oder nicht, auf die Frage reduziert werden kann, ob eine Funktion von zwei Veränderlichen an einer gegebenen Stelle ein Minimum hat oder nicht. Weiters gibt er einen neuen Beweis für das Theorem von Jacobi, wonach ein über den zum Anfangspunkt konjugierten Punkt hinausreichender Extremalenbogen kein Minimum liefern kann, und stellt Sätze über die Art des Aufhörens des Minimums in dem zum Anfangspunkte konjugierten Punkte auf.

Die beiden letzten Publikationen Hahns über Variationsrechnung sind vom Standpunkte der modernen Theorie der reellen Funktionen aus geschrieben. In der einen (*„Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode“*, Ak. Ber. Wien **131**, 1922) wird ein einfacher Beweis des Satzes von F. Riesz gegeben, wonach jede lineare, stetige Funktionaloperation durch ein Stieltjessches Integral darstellbar ist und auf Grund dieses Satzes die Lagrangesche Multiplikatorenmethode entwickelt; die andere (*„Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung“*, Ak. Ber. Wien **134**, 1925) bringt ein Existenztheorem, das eine große Anzahl einzelner Existenztheoreme umfaßt, die L. Tonelli bewiesen hat.

Schließlich ist Hahn gemeinsam mit E. Zermelo Verfasser des Abschnittes *„Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren“* in der Enzyklopädie der Math. Wiss. II A 8a (1904), ferner stammt von ihm das Kapitel *„Variationsrechnung“* in E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, Bd. I 2. Kap. XIV (1927).

Funktionentheorie. Ist $w = f(z)$ eine auf einem beschränkten Bereiche B_z definierte (im allg. nicht eindeutige) analytische Funktion und betrachtet man Wertepaare z, w, die auf B_z und einem zweiten beschränkten Bereiche B_w liegen, so gibt Hahn (*„Über Funktionen zweier komplexer Veränderlicher“*, Monatsh. **16**, 1905) unter Benutzung eines Satzes von Cousin [der allerdings später eine Einschränkung erfuhr, vgl. etwa H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (1934), S. 68] eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß auf (B_z, B_w) eine eindeutige analytische Funktion $G(z, w)$ so existiert, daß $w = f(z)$ als Lösung von $G(z, w) = 0$ betrachtet werden kann. Damit konnte er dann einen ähnlichen von Poincaré unbewiesen ausgesprochenen Satz präzisieren und beweisen, endlich den Weierstraßschen Produktsatz auf Funktionen zweier Variablen übertragen.

Mengenlehre und mengentheoretische Geometrie. Die erste hierher gehörige Publikation *„Über die nichtarchimedischen Größensysteme“* (Ak. Ber. Wien **116**, 1907) hat zugleich arithmetischen Charakter und bezieht sich auf einfach geordnete Systeme S mit kommutativer, monotoner Addition ohne archimedisches Axiom. Hahn zeigt, daß ein solches System in Klassen mit archimedischer Eigenschaft zerfällt. Werden diese Klassen in geeigneter Weise einfach geordnet und der entstandene Ordnungstypus als Klassentypus von S bezeichnet, so gibt es zu gewähltem Klassentypus immer ein System S. Ferner kann jedes System S durch komplexe Zahlen dargestellt werden, deren Einheiten eine (im allgemeinen unendliche) einfach geordnete Menge bilden. Nach Einteilung der Systeme S in „vollständige“ und „unvollständige“ durch sinngemäße Erweiterung des Hilbertschen Vollständigkeitsaxioms über archimedische Größensysteme wird gezeigt, daß für vollständige Systeme S, zwischen deren Klassen sich eine den gewöhnlichen Regeln genügende Addition definieren läßt, auch eine Multiplikation definiert werden kann, die die gewöhnlichen Multiplikationsregeln erfüllt. Daraus geht hervor, daß der für komplexe Zahlensysteme mit einer endlichen Anzahl von Einheiten gültige Satz von der Unmöglichkeit einer allen Regeln der gewöhnlichen Arithmetik genügenden Multiplikation für komplexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten seine Gültigkeit verliert.

Von Hahn stammt (*„Über die Anordnungssätze der Geometrie“*, Monatsh. **19**, 1908) der erste bindende Beweis des Jordanschen Kurvensatzes für Polygone, wenn als Beweismittel nur die Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome der Elementargeometrie, nicht aber die Stetigkeit zugelassen werden.

In der Arbeit *„Über einfach geordnete Mengen“* (Ak. Ber. Wien **122**, 1913) werden Untersuchungen von A. Haar, D. König und P. Mahlo fortgesetzt, die die Übertragung gewisser Sätze über lineare Punktmengen (Cantor-Bendixonsches Theorem, Cantors Theorie der Kohärenzen) auf einfach geordnete Mengen bezwecken.

Ferner untersucht Hahn die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat („*Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat*“, Ann. di mat. **21**, 1913) und findet insbesonders, daß bei jeder stetigen derartigen Abbildung diejenigen Punkte des Quadrates, denen mindestens zwei Punkte der Strecke entsprechen, eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums bilden und daß es eine im Quadrat überall dichtliegende Menge von Punkten gibt, denen mindestens drei Punkte der Strecke entsprechen; weiters zeigt er auch, daß es eine stetige Abbildung gibt, bei der zu einem Punkte des Quadrates niemals mehr als drei Punkte der Strecke gehören.

Zu den bekanntesten Leistungen Hahns gehört die (gleichzeitig und unabhängig auch von St. Mazurkiewicz gegebene) Festlegung des „Zusammenhanges im Kleinen“ und die hierdurch ermöglichte Charakerisierung der stetigen Streckenbilder, worüber er im Falle der Ebene auf dem Naturforschertag in Wien 1913 das erstemal vortrug. Er definierte dort den Zusammenhang im Kleinen im Punkte p der ebenen Menge M folgendermaßen: Zu jedem positiven ε gehört ein positives η derart, daß es zu jedem in der η-Umgebung von p liegenden Punkt p' von M einen die Punkte p, p' enthaltenden abgeschlossenen und zusammenhängenden Teil von M gibt, der ganz in der ε-Umgebung von p liegt; eine Menge heißt zusammenhängend im Kleinen, wenn sie es in jedem ihrer Punkte ist. Nennt man eine beschränkte, abgeschlossene Menge (der Ebene) in sich kompakt, so lautet die genannte Charakterisierung so: eine ebene Menge ist genau dann stetiges Streckenbild, wenn sie in sich kompakt, zusammenhängend und zusammenhängend im Kleinen ist. („*Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist*“, Jahresber. d. D. M. V. **23**, 1914.) Der ausführliche Beweis hierfür befindet sich in der Arbeit „*Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve*“ (Ak. Ber. Wien **123**, 1914), worin ferner der Satz auf den dreidimensionalen Raum und dann auf einen metrischen Raum im Sinne von M. Fréchet („Classes (V) normales“), also insbesonders auch auf den n-dimensionalen Euklidschen Raum ausgedehnt und jeweils eine Abbildung konstruiert wird. — Nachdem A. Schoenflies 1908 eine Charakterisierung der stetigen Streckenbilder in der Ebene gegeben hatte, weist Hahn („*Über die stetigen Kurven der Ebene*“, Math. Z. **9**, 1921) die Äquivalenz der Schoenfliesschen und seiner eigenen Bedingungen unmittelbar nach. — Am Internat. Mathematikerkongreß in Bologna 1928 teilte er einen einfacheren Beweis seines Satzes über die stetigen Streckenbilder mit („*Über stetige Streckenbilder*“, Atti d. Congr. int. d. Matem., Bologna 1928).

Ist M eine Menge eines metrischen Raumes R und a ein Punkt aus M, so heißt der umfassendste, zusammenhängende Teil von M, der a enthält, eine Komponente von M. Hahn zeigt („*Über die Komponenten offener Mengen*“, Fund. Math. **2**, 1921): jede Komponente einer beliebigen offenen Menge aus R ist genau dann offen, wenn R zusammenhängend im Kleinen ist.

Der Arbeit „*Über irreduzible Kontinua*“ (Ak. Ber. Wien **130**, 1921), liegt wieder ein metrischer Raum R zugrunde. Es wird gezeigt, daß ein kompaktes Kontinuum K aus R die Vereinigung gewisser paarweise fremden Teilmengen ist, die „Primteile“ von K heißen und entweder Kontinuen oder einzelne Punkte sind; besteht dabei K aus einem einzigen Primteile, so heißt es ein Primkontinuum. Ein Primteil von K entsteht folgendermaßen: Man wähle in K einen Punkt c und nehme alle jene Punkte c' hinzu, für die man zu jedem $\varepsilon > 0$ auf K eine ε-Kette $c_1, \ldots, c_n$ nach c so legen kann, daß R in $c_1, \ldots, c_n$ nicht zusammenhängend im Kleinen ist. Sind ferner in R die beiden Punkte a und b durch ein Kontinuum J verbunden, so daß es kein a und b verbindendes Kontinuum gibt, das echter Teil von J ist, so heißt J irreduzibel zwischen a und b; ist J überdies kompakt und kein Primkontinuum, so kann man J als eine Verallgemeinerung des Begriffes „einfacher Kurvenbogen zwischen a und b“ auffassen, wenn J als aus seinen Primteilen aufgebaut betrachtet wird. Die einfachen Bogen zwischen a und b sind der Sonderfall, bei dem sämtliche Primteile aus nur einem Punkte bestehen. Insbesonders hat J die Eigenschaft, daß es für seine Primteile eine eineindeutige Abbildung auf das Intervall $[0, 1]$ gibt, die bei entsprechenden Festsetzungen stetig wird. Von den zahlreichen Sätzen in dieser Arbeit sei noch der hervorgehoben, wonach in einem kompakten, zwischen a und b irreduziblen Kontinuum die von Z. Janiszewski eingeführten Punkte „erster Art“ bzw. „zweiter Art“ dort liegen, wo R im Kleinen zusammenhängend ist bzw. dies nicht ist.

Hierher gehört noch der allgemeinverständliche Artikel „*Mengentheoretische Geometrie*“ (Naturw. **17**, 1929) sowie der größere Teil des Stoffes, der den beiden für ein weites Publikum gedachten Wiener Vorträgen zugrunde lag: „*Die Krise der Anschauung*“ (abgedr. in: Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften, 1933) und „*Gibt es Unendliches?*“ (abgedr. in: Alte Probleme — Neue Lösungen in den exakten Wissenschaften, 1934).

Reelle Funktionen. Schon in den ersten Jahren seines mathematischen Schaffens zeigt sich Hahns Vorliebe für Probleme aus der Theorie der reellen Funktionen, einem Gebiete, dem er immer mehr seine Aufmerksamkeit zuwandte und auf dem er schließlich eine der ersten Autoritäten wurde.

In der ersten hierher gehörigen Arbeit *„Über den Fundamentalsatz der Integralrechnung“* (Monatsh. **16**, 1905) entscheidet er die Frage, ob alle stetigen Funktionen mit derselben Ableitung sich auch dann nur um eine additive Konstante unterscheiden, wenn die Ableitung im betrachteten Intervalle nicht durchwegs endlich ist dahin, daß in diesem Falle der „Fundamentalsatz der Integralrechnung nicht mehr zu gelten braucht“. — Dieses Thema lag seinem Habilitationsvortrage zugrunde. — Weiters setzt er sich (*„Über punktweise unstetige Funktionen“*, Monatsh. **16**, 1905) mit dem Kapitel über „Die punktweise unstetigen Funktionen“ im ersten Schoenfliesschen Berichte über „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“ (Jahresb. d. D. M. V. **8**, 1900) auseinander und gibt *„Bemerkungen zu den Untersuchungen des Herrn M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel“* (Monatsh. **19**, 1908).

Die wichtige Publikation *„Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (Monatsh. **23**, 1912) behandelt diesen Gegenstand in systematischer Weise. Hahn zeigt, daß die von Hellinger eingeführten integralartigen Grenzwerte durch Einführung einer neuen Veränderlichen in Lebesguesche Integrale übergeführt werden können, wodurch die ganze Theorie an Einfachheit und Vollständigkeit erheblich gewinnt.

Sind auf einem Intervalle $[a, b]$ endlich oder abzählbar unendlich viele Funktionen definiert, die integrierbar im Sinne von Lebesgue sind, so zeigt Hahn (*„Über Annäherung an Lebesguesche Integrale durch Riemannsche Summen“*, Ak. Ber. Wien **123**, 1914), daß nach Wahl einer beliebigen ausgezeichneten Zerlegungsfolge von $[a, b]$ die Zwischenpunkte so gewählt werden können, daß für *alle* gegebenen Funktionen die entsprechenden Riemannschen Summen gegen das jeweilige Lebesguesche Integral konvergieren; außerdem gibt er Summen an, die bei einer geeigneten ausgezeichneten Zerlegungsfolge das Lebesguesche Integral als Grenzwert haben. — Der Tragweite der von É. Borel 1910 gegebenen Verallgemeinerung der Riemannschen Integraldefinition sowie einer besonders einfachen und naturgemäßen Herleitung des Lebesgueschen Integralbegriffes ist je eine Publikation gewidmet (*„Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Integraldefinition“*, Monatsh. **26**. 1915, bzw. *„Über den Integralbegriff“*, Festschr. d. 57. Vers. deutscher Philolog. und Schulmänner in Salzburg 1929).

Ist auf $[a, b]$ eine Klasse geeigneter Funktionen $f(x)$ und eine Folge von „Kernen“ $\varphi_n(\xi, x)$ gegeben und gilt für jede Funktion f an einer Stelle x

$$(1) \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi_n(\xi, x)\, d\xi,$$

so liegt eine „Integraldarstellung“ der Funktionen f in x vor. Nachdem H. Lebesgue die Kerne gekennzeichnet hatte, für die an allen Stetigkeitsstellen der Funktionen f die Integraldarstellung gilt, gibt Hahn (*„Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale. I.“*, Denkschr. d. Ak. d. W. Wien **93**, 1916) zunächst Bedingungen dafür, daß

$$\overset{(m)}{f}(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi_n(\xi, x)\, d\xi$$

an jenen Stellen x gilt, für welche die geeignet definierte m-te Ableitung $\overset{(m)}{f}(x)$ von $f(x)$ existiert. Daraus gewinnt er Bedingungen, unter denen die Integraldarstellung nicht nur an allen Stetigkeitsstellen, sondern noch an gewissen andern Stellen gilt und ferner Bedingungen, unter denen die Gleichung (1) m-mal so nach x differenziert werden darf, daß man rechts unter dem Integralzeichen differenziert. Nach den allgemeinen Ausführungen werden drei Typen von Kernen eingehend betrachtet, die er den Stieltjesschen Typus, den Weierstraßschen Typus und den Poissonschen Typus nennt. Diese Untersuchungen setzt er in einem gleichbetitelten *zweiten Teile* (Denkschr. d. Ak. d. W. Wien **93**, 1916) fort. Als Maß der Approximation von

$$J_n(f, x) = \int_a^b f(\xi)\, \varphi_n(\xi, x)\, d\xi$$

an die darzustellende Funktion $f(x)$ benützt er den Wert

$$R_n = \int_a^b |f(x) - J_n(f, x)|\, dx$$

und zeigt, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

ist. Nach einigen Anwendungen dieses Ergebnisses untersucht er vollständige, normierte Orthogonalsysteme, insbesondere solche, für die das Parsevalsche Theorem aus der Theorie der Fourierschen Reihen erhalten bleibt, so daß also bei (entsprechend) gegebenen $f(x)$, $g(x)$ die Beziehung

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, g_\nu$$

gilt, worin f_ν, g_ν die „Fourierkoeffizienten" von f, g in Bezug auf das Orthogonalsystem sind. Weiters entwickelt er Summationsverfahren für die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, g_\nu,$$

die stets gegen

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

konvergieren und analog für die Reihenentwicklung von f nach Funktionen eines Orthogonalsystems, ferner Prozesse, die aus einer solchen Reihenentwicklung Ausdrücke herleiten, die gegen $\overset{(m)}{f}(x)$ überall dort konvergieren, wo diese Ableitung existiert. Schließlich werden diese Ergebnisse noch auf Fouriersche Reihen angewendet. — In der Arbeit *„Einige Anwendungen der Theorie der singulären Integrale"* (Ak. Ber. Wien **127**, 1918) gibt er eine kennzeichnende Bedingung dafür, daß die Reihenentwicklung von f nach Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems auf jeder meßbaren Punktmenge von $[a, b]$ gliedweise integrierbar sei (das Analoge für Teilintervalle aus $[a, b]$ findet sich bereits in der eben besprochenen Arbeit); ferner ergibt sich im Falle der „asymptotischen Konvergenz" einer Folge $g_\nu(x)$ gegen $g(x)$ als notwendig und hinreichend für die analoge Eigenschaft die einfache Bedingung

$$\lim_{\nu=\infty} \int_a^b |\, g(x) - g_\nu(x)\, | = 0.$$

— In der umfangreichen Untersuchung *„Über Folgen linearer Operationen"* (Monatsh. **32**, 1922) entwickelt Hahn eine allgemeine Theorie, in der die Theorie der Integraldarstellung sowie die von I. Schur gewonnenen Ergebnisse über lineare Transformationen der unendlichen Reihen als Sonderfälle enthalten sind. — Ferner vgl. man zur Integraldarstellung auch den Bericht *„Über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch bestimmte Integrale"*. (Jahresb. d. D. M. V. **30**, 1921.)

In der Arbeit *„Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen"* (Crelle Journ. **157**, 1927) werden Linearformen $u(x)$ in einem vollständigen linearen Raume R mit konvexer Maßbestimmung betrachtet und dann Bedingungen für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

$$u_y(x) = c_y$$

angegeben; darin durchläuft y eine entsprechende Indexmenge und die c_y sind reell. Auf Grund des Begriffes der „Vollstetigkeit" einer Klasse $v_y(x)$ von linearen Transformationen in bezug auf die Klasse $u_y(x)$

wird dann untersucht, wann aus der Lösbarkeit des obigen Gleichungssystems auf die des Systems

$$u_y(x) + v_y(x) = c_y$$

geschlossen werden darf.

Mit Methoden aus der Theorie der Integraldarstellungen behandelt Hahn (*„Über das Interpolationsproblem"*, Math. Z. **1**, 1918) Interpolationsverfahren, die der auf $[a, b]$ gegebenen Funktion $f(x)$ Näherungsfunktionen $P(x)$ von der Form

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\, \varphi_i(x)$$

zuordnen, wobei die $\varphi_i(x)$ irgendwelche Funktionen auf $[a, b]$ sind. Er beantwortet die Frage, wann bei Verfeinerung der Intervalleinteilung die Näherungsfunktionen gegen $f(x)$ konvergieren und ferner, wann bei geringer Änderung der Werte von $f(x)$ in den Einteilungspunkten auch die Näherungsfunktionen nur geringe Änderungen erleiden.

Der Arbeit *„Über halbstetige und unstetige Funktionen"* (Ak. Ber. Wien **126**, 1917) liegen reelle Funktionen auf Punktmengen eines metrischen Raumes zugrunde. Hahn zeigt, daß zwischen einer oberhalb stetigen und einer unterhalb stetigen Funktion, deren erste die zweite nirgends übersteigt, immer eine stetige Funktion liegt: damit konnte er einen Satz von R. Baire dahin verallgemeinern und verschärfen, daß jede unstetige Funktion, deren Schwankung in keinem Punkte die positive Zahl k übersteigt, in zwei Summanden zerlegt werden kann, deren einer stetig ist, während der andere dem Betrage nach die Zahl $k/2$ nicht übersteigt.

Weiters konstruiert er (*„Über stetige Funktionen ohne Ableitung"*, Jahresb. d. D. M. V. **26**, 1918) ein besonders durchsichtiges Beispiel einer reellen, endlichen und stetigen Funktion, die in keinem Punkte ihres Definitionsintervalles eine (endliche oder bestimmt unendliche) Ableitung oder zwei unendliche einseitige Ableitungen entgegengesetzten Zeichens besitzt.

In der Publikation *„Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge"* (Arch. d. Math. u. Phys. III **28**, 1919) wird diese Menge bei einer Folge Bairescher Funktionen gekennzeichnet.

Nachdem R. Baire die Funktionen $f(x_1, x_2)$ und $f(x_1, x_2, x_3)$, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind, auf die Stetigkeits- und Unstetigkeitspunkte hin untersucht hatte, beweist Hahn (*„Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind"*, Math. Z. **4**, 1919) folgenden abschließenden Satz:

Ist die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder ihrer n Veränderlichen, so ist sie nur punktweise unstetig, und ihre Stetigkeitspunkte liegen sogar auf jeder Mannigfaltigkeit $x_i = \text{const.}$ $(i = 1, \ldots, n)$ dicht; doch kann es zu den Koordinatenachsen parallele Mannigfaltigkeiten von $n-2$ Dimensionen geben, deren sämtliche Punkte Unstetigkeitspunkte von $f(x_1, \ldots, x_n)$ sind.

Sind auf den Mengenkörpern K' und K'' die additiven oder total-additiven Mengenfunktionen φ' bzw. φ'' gegeben, so definiert Hahn („*Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen*", Ann. di Pisa II **2**, 1933) ein Produkt $\varphi' \times \varphi''$, das wieder eine additive bzw. total-additive Mengenfunktion im Produktkörper $K' \times K''$ ist und untersucht die Eigenschaften dieses Produktes, insbesondere seine Beziehung zum Lebesgueschen Maße und zum Reduktionstheorem mehrfacher Integrale; hierbei erweist sich das Reduktionstheorem der Doppelintegrale als identisch mit dem assoziativen Gesetz der Multiplikation der total-additiven Mengenfunktionen.

Hahn ist schließlich Verfasser der beiden bekannten enzyklopädieartigen Lehrbücher: „*Theorie der reellen Funktionen I*" (1921) und „*Reelle Funktionen I*" (1933). Das zuerst genannte Buch trat an Stelle des 2. Teiles des von A. Schoenflies gemeinsam mit H. Hahn geplanten Werkes: „Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen", von dem nur der von Schoenflies verfaßte 1. Teil (1913) erschienen ist. Das Manuskript für den zweiten Band der „*Reellen Funktionen*" plante Hahn bis zum heurigen Herbst fertigzustellen, was ihm — zum großen Nachteile dieses Wissenszweiges — nicht mehr gegönnt war.

Reihen und Fouriersche Integrale. Die Summationsverfahren von Poisson, Riemann und de la Vallée Pousin der Fourierschen Reihe für $f(x)$ konvergieren für jeden Wert von x gegen $f(x)$, für den

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)|\, du = 0$$

ist; für das Fejérsche Verfahren gilt dies, wenn

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)|\, du = 0$$

ist. Hahn zeigt („*Über Fejérs Summierung der Fourierschen Reihe*", Jahresber. d. D. M. V. **25**, 1916) an einem Beispiel, daß beim Fejérschen Verfahren die erste Bedingung für die Konvergenz nicht hinreicht.

In der Arbeit „*Über eine Verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel*" (Acta math. **49**, 1926) wird unter sehr allgemeinen

Voraussetzungen über $f(x)$, darunter insbesonders die der Entwickelbarkeit von $f(x)$ an der Stelle x_0 in die Fouriersche Reihe, die Formel

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (\cos \mu x_0 \, d\Phi(\mu) + \sin \mu x_0 \, d\Psi(\mu))$$

abgeleitet, worin das Integral ein Stieltjesintegral ist und

$$\Phi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin \mu x}{x}\, dx, \qquad \Psi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1 - \cos \mu x}{x}\, dx$$

bedeutet. Diese Formel hat einen weiteren Giltigkeitsbereich als die klassische Fouriersche Integralformel und gestattet in manchen Fällen Kriterien für die Giltigkeit letzterer anzugeben. Sie geht in die Fouriersche Integraldarstellung über, wenn diese existiert und reduziert sich für alle an der Stelle x_0 in die Fourierreihe entwickelbaren periodischen Funktionen auf diese Reihe. (Vgl. auch Jahresb. d. D. M. V. **33**, 1924). — Eine analoge Formel („*Über die Methode der arithmetischen Mittel in der Theorie der verallgemeinerten Fourierschen Integrale*", Ak. Ber. Wien **134**, 1925) verlangt zu ihrer Giltigkeit nur, daß $f(x)$ im Unendlichen beschränkt und in x_0 stetig sei und reduziert sich auf Fejérs Summationsformel, wenn $f(x)$ periodisch ist.

Aus der Theorie, die in der oben angeführten Arbeit „*Über Folgen linearer Operationen*" entwickelt ist, lassen sich einige Sätze „*Über Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern*" (Monatsh. **33**, 1923) gewinnen. Bei diesen Untersuchungen fand Hahn einen einfachen Beweis für „*Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel*" (Monatsh. **33**, 1923).

Liegt eine Reihe $\sum\limits_{\nu \geqq 1} a_\nu$ aus positiven gegen Null abnehmenden Gliedern vor und ist g ihre Summe (die auch $+\infty$ sein kann), so zeigt Hahn („*Über unendliche Reihen und absolut-additive Mengenfunktionen*", Bull. of the Calcutta Math. soc. **20**, 1930), daß jede der Ungleichung $0 < x \leqq g$ genügende Zahl x genau dann durch eine „Teilreihe" $\sum\limits_{i \geqq 1} a_{\nu_i}$ dargestellt werden kann, wenn $\sum\limits_{\nu > n} a_\nu \geqq a_n$ für $n \geqq 1$ ist und untersucht die Eindeutigkeit dieser Darstellung. Daraus ergibt sich ein durchsichtiger Beweis für den von W. Sierpinski und M. Fréchet bewiesenen „Zwischenwertsatz" in der Theorie der total-additiven Mengenfunktionen.

Außer der gemeinsam mit G. Herglotz und K. Schwarzschild verfaßten Untersuchung „*Über das Strömen des Wassers in Röhren*

Ist die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder ihrer n Veränderlichen, so ist sie nur punktweise unstetig, und ihre Stetigkeitspunkte liegen sogar auf jeder Mannigfaltigkeit $x_i = \text{const.}$ $(i = 1, \ldots, n)$ dicht; doch kann es zu den Koordinatenachsen parallele Mannigfaltigkeiten von $n-2$ Dimensionen geben, deren sämtliche Punkte Unstetigkeitspunkte von $f(x_1, \ldots, x_n)$ sind.

Sind auf den Mengenkörpern K' und K'' die additiven oder total-additiven Mengenfunktionen φ' bzw. φ'' gegeben, so definiert Hahn („*Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen*", Ann. di Pisa II **2**, 1933) ein Produkt $\varphi' \times \varphi''$, das wieder eine additive bzw. total-additive Mengenfunktion im Produktkörper $K' \times K''$ ist und untersucht die Eigenschaften dieses Produktes, insbesondere seine Beziehung zum Lebesgueschen Maße und zum Reduktionstheorem mehrfacher Integrale; hierbei erweist sich das Reduktionstheorem der Doppelintegrale als identisch mit dem assoziativen Gesetz der Multiplikation der total-additiven Mengenfunktionen.

Hahn ist schließlich Verfasser der beiden bekannten enzyklopädieartigen Lehrbücher: „*Theorie der reellen Funktionen I*" (1921) und „*Reelle Funktionen I*" (1933). Das zuerst genannte Buch trat an Stelle des 2. Teiles des von A. Schoenflies gemeinsam mit H. Hahn geplanten Werkes: „Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen", von dem nur der von Schoenflies verfaßte 1. Teil (1913) erschienen ist. Das Manuskript für den zweiten Band der „*Reellen Funktionen*" plante Hahn bis zum heurigen Herbst fertigzustellen, was ihm — zum großen Nachteile dieses Wissenszweiges — nicht mehr gegönnt war.

Reihen und Fouriersche Integrale. Die Summationsverfahren von Poisson, Riemann und de la Vallée Pousin der Fourierschen Reihe für $f(x)$ konvergieren für jeden Wert von x gegen $f(x)$, für den

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \{f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)\}\, du = 0$$

ist; für das Fejérsche Verfahren gilt dies, wenn

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)|\, du = 0$$

ist. Hahn zeigt („*Über Fejérs Summierung der Fourierschen Reihe*", Jahresber. d. D. M. V. **25**, 1916) an einem Beispiel, daß beim Fejérschen Verfahren die erste Bedingung für die Konvergenz nicht hinreicht.

In der Arbeit „*Über eine Verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel*" (Acta math. **49**, 1926) wird unter sehr allgemeinen

Voraussetzungen über $f(x)$, darunter insbesonders die der Entwickelbarkeit von $f(x)$ an der Stelle x_0 in die Fouriersche Reihe, die Formel

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (\cos \mu x_0\, d\Phi(\mu) + \sin \mu x_0\, d\Psi(\mu))$$

abgeleitet, worin das Integral ein Stieltjesintegral ist und

$$\Phi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin \mu x}{x}\, dx, \qquad \Psi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1 - \cos \mu x}{x}\, dx$$

bedeutet. Diese Formel hat einen weiteren Giltigkeitsbereich als die klassische Fouriersche Integralformel und gestattet in manchen Fällen Kriterien für die Giltigkeit letzterer anzugeben. Sie geht in die Fouriersche Integraldarstellung über, wenn diese existiert und reduziert sich für alle an der Stelle x_0 in die Fourierreihe entwickelbaren periodischen Funktionen auf diese Reihe. (Vgl. auch Jahresb. d. D. M. V. **33**, 1924). — Eine analoge Formel („*Über die Methode der arithmetischen Mittel in der Theorie der verallgemeinerten Fourierschen Integrale*", Ak. Ber. Wien **134**, 1925) verlangt zu ihrer Giltigkeit nur, daß $f(x)$ im Unendlichen beschränkt und in x_0 stetig sei und reduziert sich auf Fejérs Summationsformel, wenn $f(x)$ periodisch ist.

Aus der Theorie, die in der oben angeführten Arbeit „*Über Folgen linearer Operationen*" entwickelt ist, lassen sich einige Sätze „*Über Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern*" (Monatsh. **33**, 1923) gewinnen. Bei diesen Untersuchungen fand Hahn einen einfachen Beweis für „*Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel*" (Monatsh. **33**, 1923).

Liegt eine Reihe $\sum\limits_{\nu=1} a_\nu$ aus positiven gegen Null abnehmenden Gliedern vor und ist g ihre Summe (die auch $+\infty$ sein kann), so zeigt Hahn („*Über unendliche Reihen und absolut-additive Mengenfunktionen*", Bull. of the Calcutta Math. soc. **20**, 1930), daß jede der Ungleichung $0 < x \leq g$ genügende Zahl x genau dann durch eine „Teilreihe" $\sum\limits_{i \geq 1} a_{\nu_i}$ dargestellt werden kann, wenn $\sum\limits_{\nu > n} a_\nu \geq a_n$ für $n \geq 1$ ist und untersucht die Eindeutigkeit dieser Darstellung. Daraus ergibt sich ein durchsichtiger Beweis für den von W. Sierpinski und M. Fréchet bewiesenen „Zwischenwertsatz" in der Theorie der total-additiven Mengenfunktionen.

Außer der gemeinsam mit G. Herglotz und K. Schwarzschild verfaßten Untersuchung „*Über das Strömen des Wassers in Röhren* *und Kanälen*" (Zeitschrift f. Math. u. Physik **51**, 1904) und einer Anzahl von Noten — größtenteils vorläufige Mitteilungen im Anzeiger d. Ak. d. W. in Wien über soeben besprochene Arbeiten — sowie zahlreichen Referaten und Buchbesprechungen stammt von Hahn noch der ausführliche „*Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen*" (Jahresb. d. D. M. V. **20**, 1911). Ferner versah er die Herausgabe von B. Bolzanos „*Paradoxien des Unendlichen*" (1920) mit Anmerkungen und schrieb gemeinsam mit H. Tietze das Lehrbuch „*Einführung in die Elemente der höheren Mathematik*" (1925); schließlich stammt von ihm in E. Pascals Repertorium der höheren Mathematik Bd. I, 1 das Kapitel I: „*Arithmetik, Mengenlehre, Grundbegriffe der Funktionenlehre*" (1910) sowie gemeinsam mit L. Lichtenstein und J. Lense in Bd. I, 3 das Kapitel XXIV: „*Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlich vieler Variabeln und ihre Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen*" (1929).

Literaturverzeichnis.

1. Bücher und Einzelschriften.

Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren. Gemeinsam mit E. Zermelo. Enzyklopädie d. mathem. Wissensch. (B. G. Teubner, Leipzig.) II A, 8 a (1904).

Arithmetik, Mengenlehre, Grundbegriffe der Funktionenlehre. E. Pascal, Repertorium d. höheren Mathem. (B. G. Teubner, Leipzig.) Bd. I, 1, Kap. I (1910).

Variationsrechnung. Ibidem. Bd. I. 2, Kap. XIV (1927).

Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlich vieler Variabeln und ihre Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. (Gemeinsam mit L. Lichtenstein u. J. Lense.) Ibidem. Bd. I, 3, Kap. XXIV (1929).

B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen. Mit Anmerkungen versehen von H. Hahn. (F. Meiner, Leipzig 1920.)

Theorie der reellen Funktionen I. (J. Springer, Berlin 1921.)

Einführung in die Elemente der höheren Mathematik. Gemeinsam mit H. Tietze. (S. Hirzel, Leipzig 1925.)

Reelle Funktionen I. (Akad. Verlagsges., Leipzig 1932.)

Überflüssige Wesenheiten (Occams Rasiermesser). (A. Wolf, Wien 1930.)

Logik, Mathematik und Naturerkennen. Einheitswissenschaft, Heft 2. (Gerold & Co., Wien 1933.)

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften. Fünf Wiener Vorträge. Darunter H. Hahn: Die Krise der Anschauung. (F. Deuticke, Leipzig und Wien 1933.)

Alte Probleme — Neue Lösungen in den exakten Wissenschaften. Fünf Wiener Vorträge. Darunter H. Hahn: Gibt es Unendliches? (F. Deuticke, Leipzig und Wien 1934.)

2. Publikationen in Zeitschriften.

Acta mathematica: Über eine Verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel. **49** (1926).

Anzeiger d. Akad. d. W. in Wien: Über die nichtarchimedischen Größensysteme. **44** (1907). — Über Extremalenbögen, deren Endpunkt zum Anfangspunkt konjugiert ist. **46** (1907). — Über einfach geordnete Mengen. **50** (1913). — Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale. **53** (1916). — Über halbstetige und unstetige Funktionen. **54** (1917). — Einige Anwendungen der Theorie der singulären Integrale **55** (1918). — Über irreduzible Kontinua. **58** (1921). — Dankschreiben f. d. Verleihung d. R. Lieben-Preises. **58** (1921). — Dankschreiben f. seine Wahl zum korr. Mitglied. **58** (1921). — Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung. **62** (1925). — Über die Methode der arithmetischen Mittel. **62** (1925). — Über additive Mengenfunktionen. **65** (1928). — Über stetige Streckenbilder. **65** (1928). — Über unendliche Reihen und total-additive Mengenfunktionen. **65** (1928). — Über den Integralbegriff. **66** (1929). — Über separable Mengen. **70** (1933).

Annali di Matematica: Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat. (III) **21** (1913).

Annali di Pisa: Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen. (II) **2** (1933).

Archiv d. Math. u. Physik: Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge. III, **28** (1919).

Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928: Über stetige Streckenbilder.

Bulletin of the Calcutta Mathem. Society: Über unendliche Reihen und absolut-additive Mengenfunktionen. **20** (1930).

Denkschriften d. Akademie d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl.: Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale I und II. **93** (1916).

Erkenntnis: Die Bedeutung der wissenschaftlichen Weltauffassung, insbesondere für Mathematik und Physik. **1** (1930). — Diskussion zur Grundlegung der Mathematik. **2** (1931).

Festschrift der 57. Versamml. Deutscher Philologen u. Schulmänner in Salzburg: Über den Integralbegriff. (1929.)

Forschungen und Fortschritte: Empirismus, Mathematik, Logik. **5** (1929).

Fundamenta mathematica: Über die Komponenten offener Mengen. **2** (1921).

Jahresbericht der D. M. V.: Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. **20** (1911). — Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist. **23** (1914). — Über Fejérs Summierung der Fourierschen Reihe. **25** (1916). — Über stetige Funktionen ohne Ableitung. **26** (1918). — Über die Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge. **27** (1919). — Arithmetische Bemerkungen. (Entgegnung auf Bemerkungen des Herrn J. A. Gmeiner.) **30** (1921). — Schlußbemerkungen hiezu. **30** (1921). — Über Funktionaloperationen. **31** (1922). — Über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch bestimmte Integrale. (Bericht.) **30** (1921). — Über Fouriersche Reihen und Integrale. **33** (1924).

Journal f. d. reine u. angew. Mathem.: Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. **157** (1927).

Mathem. Annalen: Bemerkungen zur Variationsrechnung. **58** (1904). — Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. **63** (1907). — Über räumliche Variationsprobleme. **70** (1911).

Mathem. Zeitschrift: Über das Interpolationsproblem. **1** (1918). — Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind. **4** (1919). — Über die stetigen Kurven der Ebene. **9** (1921).

Monatsh. f. Mathem. u. Physik: Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale. **14** (1903). — Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung. **14** (1903). — Über Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. **16** (1905). — Über den Fundamentalsatz der Integralrechnung. **16** (1905). — Über punktweise unstetige Funktionen. **16** (1905). — Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung. **17** (1906). — Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung. **17** (1906). — Bemerkungen zu den Untersuchungen des Herrn M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel. **19** (1908). — Über die Anordnungssätze der Geometrie. **19** (1908). — Über Bolzas fünfte notwendige Bedingung in der Variationsrechnung. **20** (1909). — Über Variationsprobleme mit variablen Endpunkten. **22** (1911). — Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. **23** (1912). — Ergänzende Bemerkung zu meiner Arbeit über den Osgoodschen Satz in Band 17 dieser Zeitschrift. **24** (1913). — Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Integraldefinition. **26** (1915). — Über Folgen linearer Operationen. **32** (1922). Über Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern. **33** (1923). — Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel. **33** (1923).

Die Naturwissenschaften: Mengentheoretische Geometrie. **17** (1929).

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo: Über den Zusammenhang zwischen den Theorien der zweiten Variation und der Weierstraßschen Theorie der Variationsrechnung. **29** (1910).

Sitzungsber. d. Akademie d. Wissensch. Wien, math.-naturw. Klasse: Über die nicht-archimedischen Größensysteme. **116** (1907). — Über Extremalenbogen, deren Endpunkt zum Anfangspunkt konjugiert ist. **118** (1909). — Über einfach geordnete Mengen. **122** (1913). — Über Annäherung an Lebesguesche Integrale durch Riemannsche Summen. **123** (1914). — Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve. **123** (1914). — Über halbstetige und unstetige Funktionen. **126** (1917). — Einige Anwendungen der Theorie der singulären Integrale. **127** (1918). — Über irreduzible Kontinua. **130** (1921). — Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode. **131** (1922). — Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung. **134** (1925). — Über die Methode der arithmetischen Mittel in der Theorie der verallgemeinerten Fourierschen Integrale. **134** (1925).

H. Weber-Festschrift, 1922: Allgemeiner Beweis des Osgoodschen Satzes der Variationsrechnung für einfache Integrale.

Zeitschr. f. Mathem. u. Physik: Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen (gemeinsam mit G. Herglotz und K. Schwarzschild). **51** (1904).