Max Noether

Paul Gordan

Sonderabdruck.

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

OTTO HÖLDER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

Otto Blumenthal
in Aachen

75. Band. 1. Heft.

Mit 19 Figuren im Text.

Ausgegeben am 10. Februar 1914.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1914.

Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LXXV. Band. 1. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Paul Gordan.

Von

Max Noether in Erlangen.

(Mit Unterstützung von Felix Klein in Göttingen und von Emmy Noether in Erlangen.)*)

Dem kurzen Gedenkworte, welches die Redaktion der Annalen ihrem treuen Freunde Paul Gordan bei seinem Hinscheiden gewidmet hat**) und das schon die wesentlichen Züge seiner Persönlichkeit wiedergibt, lassen wir hier eine *Darstellung seiner mathematischen Leistungen* folgen. Gordan schließt unmittelbar an die Reihe der großen Algebraiker, zunächst an Clebsch, an, deren Arbeit in dieser Zeitschrift gewürdigt worden ist; und sein Name ist mit ihren Blättern selbst unlöslich verbunden. So sind wir ihm schuldig, unsere Darstellung eingehend zu halten. Wir verbinden damit die Schilderung seines Lebensganges.***)

Paul Albert Gordan ist geboren zu Breslau am 27. April 1837, als Sohn des Kaufmanns David Gordan. Seine Mutter Friederike, aus der bekannten dortigen Familie Friedenthal, wurde ihm früh entrissen; sie hinterließ noch drei ältere Söhne — einer später ein höherer Staatsbeamter — und eine Tochter, alle sind vor ihrem Bruder verstorben. Paul Gordan wurde zunächst zu Hause unterrichtet und absolvierte dann die Quarta und einen Teil der Tertia des Friedrichsgymnasiums in Breslau, worauf ihn sein Vater in seinem eigenen Geschäft — einem Pelzhandel und Bankgeschäft in Breslau und Berlin — der kaufmännischen Laufbahn

*) Von Ersterem wurde ich in der Gesamtwürdigung, von Letzterer in der Würdigung der algebraischen Arbeiten wesentlich unterstützt.

**) Bd. 73, S. 321—322.

***) Ein Teil der bezüglichen Daten ist der Dissertation (I des am Schlusse angefügten Schriftenverzeichnisses) entnommen. Andere verdanke ich den Herren R. Sturm, dem Studiengenossen von Breslau, C. F. Geiser, einem der Opponenten bei der Berliner Disputation von 1862, J. Thomae, dem Göttinger Studiengenossen, und A. Brill, dem Gießener Kollegen; ferner L. Schlesinger solche aus Gießener Akten.

Die Nummernzitate des Aufsatzes beziehen sich auf das am Schluß folgende zuführte. Zugleich besuchte er einige Jahre in Breslau eine Handelsschule; dann folgten zwei Jahre in einem Bankgeschäft in Genf, und wieder kurze Zeit im väterlichen Geschäft, diesmal in Berlin. Hierbei gewann jedoch bald eine früh gefaßte Neigung zur Mathematik soweit die Oberhand, daß ihn der Professor am Friedrich Wilhelm-Gymnasium und an der Kriegsschule N. H. Schellbach, der Lehrer so vieler Lehrer, erst privatim in diese Wissenschaft einführte und dann an E. Kummer verwies, der gerade 1855 aus Breslau nach Berlin zu umfassender Tätigkeit übergesiedelt war. Gordan hörte nun bei Kummer an der Universität, also in dessen erster zahlentheoretischer Periode, während mehrerer Semester, bereitete sich zugleich zum Gymnasialabsolutorium vor und erhielt nach einem mehrmonatigen Besuch des katholischen Gymnasiums zu Neisse daselbst am 19. August 1857, nach einer kleinen mathematischen Privatarbeit, das Reifezeugnis.

Jetzt folgten neun Universitätssemester bis zur Promotion: eines in Breslau, drei in Königsberg, wieder vier in Breslau, eines in Berlin. Seine Lehrer in Breslau waren außer Galle besonders Joachimsthal — bis zu dessen Tod, ein Semester vor Gordans zweitem Weggang von Breslau — und Schroeter, in Königsberg Richelot und Rosenhain; und so ist Gordan nun ganz in der Jacobischen Schule herangebildet: in Variationsrechnung, Mechanik, Elliptischen Funktionen usw., wenn er auch, wie es scheint, einige dieser Gebiete, so das letztgenannte, nur nach Abhandlungen und Vorlesungsheften zu studieren Gelegenheit hatte. In Berlin verkehrte Gordan dann mit Kronecker und hörte dessen 1861/62 zum ersten Mal gelesenes Kolleg über die Auflösung der algebraischen Gleichungen, so über die mit elliptischen Funktionen zusammenhängenden, und über den Rationalitätsbereich: Theorien und Begriffe, die für Gordan später noch von Wichtigkeit wurden.

In Breslau empfing Gordan auch das Thema zu seiner Dissertation, sie ist aus einer Arbeit „De linea geodetica" hervorgegangen, mit der er auf eine von der Fakultät gestellte Preisfrage im August 1861 den Preis erhielt*). Diese in Berlin am 1. März 1862 verteidigte Doktordissertation behandelt die geodätische Linie auf dem Erdsphäroid. Die Darstellung durch elliptische Thetas erfolgt nicht in der von Jacobi (J. f. Math. 53) gegebenen Form, sondern direkt nach den Formeln der Fundamenta. Interessanter ist die Behandlung der Variationsaufgabe selbst, bei der

*) Die Frage, an Jacobis Formeln J. f. Math. 53 anknüpfend, war von Joachimsthal 3. Aug. 1860 gestellt; das Urteil gab Schroeter ab. Es lautete anerkennend für das wissenschaftliche Streben des Verfassers, ablehnend gegenüber der Form und erklärte die Arbeit als des Preises für „nicht unwürdig" (nach dem „Bericht der Fakultäten über die von der kgl. Univ. zu Breslau gestellten Preisaufgaben", 3. Aug. 1861).

offenbar — die Literatur ist hierbei nicht angegeben — die Methode von Lagrange-Jacobi*) benutzt worden ist. Durch Rechnungen, welche lediglich dem speziellen Problem angepaßt sind, stellt Gordan fest, einmal: daß alle von einem Punkt A ausgehenden geodätischen Linien an irgend einen Punkt B der Fläche in ihrem Verlauf im allgemeinen beliebig nahe herangehen; daß aber die Eigenschaft des absoluten Minimums höchstens bis zum neuen Treffpunkt zweier Linien mit supplementärem Azimut in A gilt; sodann: daß das relative Minimum nur bis zum Schnittpunkt zweier sukzessiver Linien von A statthat. Die Jacobische zu einem gegebenen Punkt A gehörige Umhüllungskurve wird nicht behandelt.

Von den Thesen, welche Gordan bei jener Disputation — in einem Latein freilich, das Kronecker nicht gerade als klassisch anerkannte — verteidigte, seien hier zwei angeführt, die erste, weil sie seinen Anschauungen auch aus späterer Zeit entspricht, die zweite aus dem entgegengesetzten Grunde:

> „Die Methode des Unendlichkleinen ist, wie ich behaupte, nicht weniger genau, als die der Grenzen".
>
> „Es hat größeres Interesse zu untersuchen, welche Eigenschaften einer durch eine Differentialgleichung definierten Funktion innewohnen, als durch welche schon bekannte Funktionen sie ausgedrückt werden könne."

Die Funktionentheorie zog Gordan im Herbst 1862 zu Riemann. Er bekam auch die Einwilligung des Vaters, der lange an dem Sohne nur die rechnende, nicht die mathematische Begabung anerkennen wollte; und so ließ er sich in Göttingen immatrikulieren. Aber der nächste Zweck des dortigen Aufenthaltes wurde verfehlt. Zu mehr als einem kurzen Gespräch mit Riemann über dessen Flächen und einigen Wochen Kolleg über Potentialtheorie ist es nicht gekommen, da der erkrankte Forscher nach Italien abreisen mußte. Gordans Schicksalsgenosse war hierbei der einige Jahre jüngere J. Thomae, der sich nun eng an ihn anschloß. Beide hörten Dirichletsche Zahlentheorie bei E. Schering, Gordan freilich, wie überhaupt im Kolleg, nicht nachschreibend, ja halb eingeschläfert; um so lebhafter wurde er dann in der Diskussion auf den täglichen weiten Spaziergängen mit mehrmaliger Einkehr. Damals beschäftigte er sich mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, und er führte seinen Freund in seiner eindringlichen Art in sie ein, was dann diesen zur Beschäftigung mit der Transformationstheorie der Abelschen Funktionen antrieb.

In Göttingen traf Gordan im Juni 1863 eine Aufforderung von A. Clebsch, sich in Gießen zu habilitieren. Vielleicht war die Verbindung durch die

*) J. f. Math. 17; von Jacobi in Vorlesungen behandelt.

gemeinschaftlichen Beziehungen zur Königsberger Schule, oder zu Schellbach, in dessen Seminar Clebsch 1854 tätig gewesen, entstanden: jedenfalls zögerte Gordan nicht, der Aufforderung Folge zu leisten. Seine Untersuchungen wurden mit Thomaes Hilfe sofort zusammengefaßt, am 5. Juli ging das Gesuch nach Gießen, und die Habilitation konnte schon am 29. Juli 1863 vor sich gehen. Freilich war vorher noch eine Klausurprüfung in Mathematik und Physik, und ein Kolloquium in diesen Fächern und in Philosophie zu bestehen. Am 8. September erfolgte die venia docendi.

Von den damals verteidigten zwölf Thesen stehen einige unter Göttinger Einflüssen, wie die achte:

„Die Probleme, welche die Riemannsche Geometrie der Lage stellt, sind begrifflich einfacher, als selbst die neuere Geometrie;"

andere, über partielle Differentialgleichungen usw., stehen auf Jacobischem Boden; charakteristisch für Gordan sind nur die neunte und elfte:

„Es ist als wesentlicher Fortschritt der Analysis anzusehen, wenn sie sich dazu erhebt, gewisse oft vorkommende Kombinationen mit eigenen Namen zu bezeichnen."

„Es ist von großem Werte, selbst Bekanntes durch neue Methoden zu beweisen."

In der Habilitationsschrift (II) wird die Aufgabe, die Konstante der *linearen Transformation der elliptischen Thetafunktion* als explizite Funktion der Transformationskoeffizienten zu bestimmen, vollständig erledigt. Was Gordan zu der Aufgabe hinzog, waren wohl zunächst die Erklärungen Jacobis (in einem Briefe an Hermite von 1845*)): daß er in seinen Vorlesungen die Theorie der unendlich vielen Formen der Thetafunktion umständlich gegeben habe, und daß — wenigstens im Fall des Nullarguments — die schwierige Bestimmung der auftretenden achten Einheitswurzel entweder auf Kettenbruchentwicklung oder auf die Gaußschen Summen führe. Oder es war mindestens der (allein zitierte) Bericht Rosenhains in seiner Preisschrift von 1851, der am speziellen Fall des Übergangs vom Periodenverhältnis τ zu $\frac{1}{\tau}$ mittels Fourierscher Reihe und Umformung der Integralkoeffizienten den Gang darstellt. Leider ist die betreffende Vorlesung Jacobis nicht veröffentlicht; nur die Zerlegung der θ-Reihe in eine endliche Summe von Teilreihen ist aus der Dissertation von Schroeter bekannt. Jedenfalls hat Gordan im allgemeinen den Gang Jacobis und seine Resultate rekonstruiert. Eine Abweichung besteht vielleicht darin, daß Gordan die Integralumwandlung durch einen Grenzprozeß für einen speziellen Modul ersetzt.

*) J. f. Math. 32 oder Werke, Bd. I von 1846; s. auch J. f. Math. 36.

Gordan war es aber entgangen, daß schon fünf Jahre vorher (in den C. R. der Pariser Akademie und in Liouvilles Journal) Hermite, von denselben Anregungen ausgehend, dieselben Endresultate vollständig entwickelt hatte, nach einer Methode, die eng an Jacobi anschließt.

So bedeutend die Leistung an sich ist, man vermißt in ihr — worauf Enneper in seinem historischen Buch über die elliptischen Funktionen hinweist — den Einblick in die Quellen. Dieser Umstand hängt einmal mit Gordans durchaus synthetischer Darstellungsweise zusammen; sodann aber auch mit seiner Arbeits- und Publikationsmethode: er führte für jede Arbeit eine große Reihe von Formelheften, sehr gut geordnet, aber nur mit dem geringsten Maße von Text versehen; die weitere Textgestaltung für den Druck und die Druckkorrekturen übernahmen dann mathematische Freunde. So konnte sich aber nicht immer eine völlige Korrektheit der Fassung ergeben, und manchmal sieht man auch nicht den tieferen Untergrund, auf welchem die Überlegungen ruhen. Auch enthalten nur einige der veröffentlichten Aufsätze, darunter aber gerade die ersten, den spezifischen Stil Gordans: lauter kurze, direkte, unvermittelt nebeneinanderstehende Sätze.

Die Theorie der Transformation der elliptischen Funktionen hat Gordan vielleicht auch in der Hoffnung auf Ergebnisse interessiert, die über Hermite und Kronecker hinaus in Zusammenhängen zwischen Gleichungen allgemeiner Art und Modulargleichungen erlangt werden könnten. Jedenfalls ist er noch einmal auf sie eingegangen (1), diesmal auf die der *nichtlinearen* Transformation. Er stellt ein Produkt von r Thetafunktionen, mit verschiedenen Argumenten w_h und mit Moduln $m_h\tau$, die ganzzahlige Vielfache von τ sind, als Summe von $m_1 m_2 \cdots m_r$ Produkten von je r solchen Funktionen dar, alle mit dem Modul τ, aber mit Argumenten, die lineare Verbindungen der w_h, mit gebrochenen Zahlen als Koeffizienten, sind. Es wird so eine sehr allgemeine Formel erhalten, wenn auch nicht gerade „alle nur denkbaren Beziehungen"; auch hat Gordan die beabsichtigten Anwendungen auf Modulargleichungen nicht mitgeteilt. Die Richtung ist eine starke Verallgemeinerung der schon genannten Königsberger Dissertation Schroeters von 1854; sie ist auch erst über 20 Jahre später (von Krause, sowie von Prym-Krazer*)) weiter verfolgt worden.

In Gießen schloß sich Gordan sofort eng an Clebsch an, ein Anschluß, der bald für die Wissenschaft von hoher Bedeutung werden sollte: er führte zu dem gemeinsamen Werk über die *Theorie der Abelschen Funktionen* (III). Indessen darf man sich die Vorgeschichte des Werkes doch nicht

*) Vgl. M. Krause, Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Größe (Teubner), Bd. II (1897), S. 289.