PHYSIKALISCHE BLÄTTER
11. JAHRGANG 1955/HEFT 6

Carl Friedrich Gauß

Zum 100. Todestag

Von K. Strubecker

CARL FRIEDRICH GAUSS

* 30. April 1777 in Braunschweig † 23. Februar 1855 in Göttingen

Carl Friedrich Gauß

Zum 100. Todestag

Von Professor *Karl Strubecker*, Karlsruhe

Wie kein Mathematiker vor ihm und nach ihm hat *Carl Friedrich Gauß* in fast allen Zweigen der mathematischen Wissenschaften seine Spuren hinterlassen. Vielen der bedeutendsten mathematischen Disziplinen hat er das unvergängliche Siegel seines Geistes aufgeprägt. Einige der schönsten Zweige der Mathematik sind überhaupt erstmals seinem Kopfe entsprungen. Theorie und Anwendung, Gedanke und Kalkül wurden von *Gauß* in gleicher Vollkommenheit gepflegt und beherrscht. Neben der staunenswerten analytischen Kraft seines mathematischen Denkens stehen gleichberechtigt die wunderbaren Erfindungen seiner rechnerischen Phantasie. All dies zeichnete *Gauß* schon in seinen jungen Jahren vor seinen mathetischen Zeitgenossen aus und wurde von allen neidlos anerkannt.

Auf die Frage, ob denn der damals 29jährige *Gauß* der hervorragendste deutsche Mathematiker sei, erhielt *Alexander von Humboldt* von dem sonst so schwierigen, doppelt so alten *Laplace* die Antwort, *Gauß* sei der erste Mathematiker nicht Deutschlands, sondern der Welt. Es ist daher nicht verwunderlich, daß sein König 50 Jahre später auf die nach *Gauß*ens Tode geprägte Gedenkmünze die Inschrift „*Mathematicorum Princeps*“ setzen ließ.

Gauß, am 30. April 1777 zu Braunschweig geboren, war der Sohn eines Handwerkers. Schon bevor er zur Schule ging, gab er Proben seiner Fertigkeit im Kopfrechnen. Er selbst sagte, er hätte früher rechnen als sprechen gelernt. Herzog *Ferdinand von Braunschweig*, der auf die ungewöhnlichen Fähigkeiten des Knaben aufmerksam wurde, ermöglichte ihm den Besuch des Catharinums (1788) und dann, zur Vorbereitung auf das Universitätsstudium, des Collegium Carolinum (1793), des rühmlichen Vorgängers der Technischen Hochschule in Braunschweig, endlich der Universität in Göttingen (1795—1798), und gab ihm auch die Muße, anschließend in Braunschweig (1798—1807) ganz seinen mathematischen Ideen zu leben.

Die Universität Göttingen, an der der seinerzeit berühmte *Kästner* wirkte, bot *Gauß* nicht in Vorlesungen, sondern nur durch ihre Bibliothek die Möglichkeit der mathematischen Weiterbildung. Wir besitzen aus dieser Zeit ein erst 1899 von *Stäckel* wiederentdecktes *wissenschaftliches Tagebuch*, dessen erste Eintragung unterm 30. März 1796 die Entdeckung der Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks mit Zirkel und Lineal betrifft. 1799 promovierte *Gauß* nicht in Göttingen, sondern in Helmstedt, wo der sehr angesehene *Johann Friedrich Pfaff* wirkte, mit seinem *ersten strengen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra*, dem als methodisches Hilfsmittel die von *Gauß* allerdings sorgfältig getarnte Vorstellung der *Gauß*schen Ebene der komplexen Zahlen zugrunde liegt. Mit deren Darstellung trat er erst 1831 hervor. Auch der Name komplexe Zahl stammt von *Gauß*.

Zahlentheorie und Analysis

1798 vollendete *Gauß*, 21jährig, sein Meisterwerk, die berühmten *„Disquisitiones Arithmeticae“*, den eigentlichen Grundstein und die Bibel der modernen Zahlentheorie, ein Werk höchster inhaltlicher Vollendung, das *Gauß* ganz aus sich ohne Rückgriff auf Vorgänger schuf, und mit dem er alles das, was seine Vorläufer *Euler*, *Lagrange* und *Legendre* in Jahrzehnten vor ihm geschaffen hatten, weit übertraf. *Quadratische Reste*, *quadratische Formen* und *die Auflösbarkeit der Kreisteilungsgleichungen durch Quadratwurzeln* sind die drei Grundthemen dieses als sehr schwierig bekannten Werkes, das erst *Gauß*ens Göttinger Nachfolger, *Dirichlet*, dem vollen Verständnis seiner Zeitgenossen erschlossen hat. Alle drei Themen umschließen hervorragende Leistungen *Gauß*ens wie das schmiegsame Hilfmittel der *Kongruenzenrechnung*, den ersten *Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes*, *die Äquivalenztheorie der definiten binären und ternären quadratischen Formen* und das berühmte Ergebnis, daß alle jene und nur jene *regelmäßigen Vielecke vom Primzahlgrad p* mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, bei denen die Primzahl p die Gestalt

$$p = 2^{2^n} + 1$$

hat..

Die schwierige Lesbarkeit der *„Disquisitiones Arithmeticae“* und vieler anderer *Gauß*scher Schriften liegt an der Eigentümlichkeit der Darstellungsart, vor allem an dem Bemühen um klassischen Stil und Formvollendung des Gegenstandes.

Gauß selbst sagte, er schreibe langsam, weil er stets auf kleinem Raum möglichst viel sagen wolle, und weil kurz zu schreiben viel mehr Zeit koste als lang. Auf seinem Petschaft findet sich sein berühmter Wahlspruch: *„Pauca sed matura“*. Ein weiteres schon angedeutetes Kennzeichen des *Gauß*schen Stils ist das sorgfältige Verwischen aller Spuren, die das erste Entdecken seiner Theorien und die leichteren Wege schrittweise forschenden Vordringens verraten könnten.

Diesem Stil gemäß ist die in den mathematischen Wissenschaften erstmals bei *Gauß* völlig zum Durchbruch kommende Einsicht der *Notwendigkeit einer genauen Begrenzung des Gültigkeitsbereichs aller mathematischen Sätze*, einer Einsicht, die wir heute gerne als die *Gaußsche Strenge der Mathematik* bezeichnen.

Kennzeichnend für diese neue Strenge der Mathematik ist vor allem die Stellung von *Gauß*, *Cauchy* und *Abel* zur Theorie der unendlichen Reihen. Die *Frage nach der Konvergenz einer Reihe* ist damals erst gestellt worden. Die ersten exakten Konvergenzkriterien findet man in der berühmten Arbeit von *Gauß* über die *hypergeometrische Reihe* $F(a,b,c,x)$ von 1812, von der die reelle und komplexe Analysis viele bedeutende Impulse empfangen hat.

Gauß hat seine wahren Errungenschaften auf dem Gebiete der komplexen Analysis nicht veröffentlicht. Nur wenigen Freunden gab er in Briefen geringen Einblick in seine *funktionentheoretischen Entdeckungen*. So kam es, daß andere, *Cauchy*, *Abel* und *Jacobi*, den Ruhm der ersten Veröffentlichung haben. Erst der *Gauß*sche Nachlaß hat den staunenden Zeitgenossen den ganzen Reichtum der *Gauß*schen Vorentdeckungen enthüllt. So besaß *Gauß*, der seit 1799 mit dem beschäftigt war, was wir heute komplexe Funktionentheorie nennen, schon 1811 den dann nach *Cauchy* (1825) benannten Integralsatz; ebenso kannte er (teilweise schon in den *Disquisitiones Arithmeticae* versteckt angedeutet) alle wesentlichen Eigenschaften der sogenannten *elliptischen Funktionen*, deren allgemeinen Begriff er schon 1800 besaß. Er entdeckte insbesondere (1800) die doppelte Periodizität dieser (durch Umkehrung der schon von *Euler* und *Legendre* eifrig studierten elliptischen Integrale entstehenden) elliptischen Funktionen (zunächst nur für den lemniskatischen Sonderfall, später allgemein), ihre Transformationstheorie und Periodenteilungseigenschaften, ihre Darstellung durch Thetareihen (mit denen *Gauß* sich ausführlich beschäftigt hat) und vieles andere mehr.

Keiner seiner eingeweihten Freunde, *Schumacher*, *Bessel*, *Olbers*, *Encke*, vermochte durch sein Drängen *Gauß* dazu zu bewegen, seine Erkenntnisschätze bekannt zu machen. „Ich hasse alles übereilte Publizieren“, schrieb er 1832 an *Encke*, „und wünsche immer nur Reifes zu geben“. *Gauß* wollte stets nur so schreiben, „ut nihil amplius desiderari possit“. So kam es, daß *Abel* und *Jacobi* in einem berühmten gegenseitigen Wettstreite bei den elliptischen Funktionen *Gauß* „der Mühe des Publizierens überhoben“.

Einige seiner schönsten Ergebnisse fand *Gauß* auf einem induktiv-experimentellem Wege. *Gauß* war von früher Jugend an ein begeisterter und ebenso unermüdlicher wie kunstfertiger Rechner, der gern und oft zur Erholung Zahlengrößen, die ihm begegneten, auf 20, 30, 50 und mehr Dezimalen genau ausrechnete. Um einem unbekannten mathematischen Zusammenhang wie dem quadratischen Reziprozitätsgesetz auf die Spur zu kommen, scheute er nicht davor zurück, riesige Zahlentafeln zu berechnen. Selbst eine besondere fünfstellige Logarithmentafel (Additions- und Subtraktionslogarithmen) stammt von ihm; ebenso viele andere Tabellenwerke.

Induktiv hat *Gauß* in früher Jugend seine berühmte asymptotische Formel über die *Verteilung der Primzahlen* gefunden, die besagt, daß die Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen unter der Zahl n asymptotisch gleich $n/\ln n$ ist, und viele andere Formeln, die erst sehr viel später bewiesen werden konnten.

Schon im Alter von 15 Jahren beschäftigte sich *Gauß* mit dem sogenannten *arithmetisch-geometrischen Mittel* $M(1,x)$, das man, von den Zahlen 1 und $x > 0$ startend, durch abwechselnde arithmetische und geometrische Mittelung bilden kann. Er berechnete $M(1,x)$ vielstellig für zahlreiche Werte von x, z. B. für $x = \sqrt{2}$, legte sich eine nach halben Graden φ zwischen 0° und 90° fortschreitende Tafel für $M(1,\sin\varphi)$ an und stellte die Potenzreihenentwicklung von $M(1,1+x)$ auf.

Es ist eine der merkwürdigsten Fügungen des mathematischen Schicksals von *Gauß*, daß gerade dieses arithmetisch-geometrische Mittel berufen war, in den späteren Untersuchungen *Gaußens* zur *Theorie der elliptischen Integrale* und der anschließenden Theorie der elliptischen Funktionen und der Modulfunktion eine grundlegende Rolle zu spielen. Im Mai 1799 fand *Gauß* nämlich, durch bloßen Vergleich der vielstelligen numerischen Ergebnisse, daß das elliptische Integral für den Umfang u der Lemniskate

$$r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$$

bis zur 11. Dezimale durch die Formel

$$u = 2a\pi / M(1, \sqrt{2})$$

ausgedrückt werden kann. Mit dem Beweis dieser Tatsache war der Analysis ein neues Feld eröffnet; sie war die Wurzel der *Gauß*schen Entdeckungen zur *Theorie der elliptischen Funktionen.*

Geometrie

Die bisher erwähnten *Gauß*schen Entdeckungen gehören sämtlich der reinen Mathematik an, nämlich den Gebieten der *Zahlentheorie* und der *Funktionentheorie.* Sie stellen nur einen Ausschnitt aus dem *Gauß*schen Schaffen auf diesen Gebieten dar, man müßte ebenso etwa die Theorie der *Gauß*schen ganzen komplexen Zahlen, die Kompositionstheorie der quadratischen Formen und die Theorie der kubischen und biquadratischen Reste nennen.

Dem Boden der reinen Mathematik gehört auch der Beitrag von *Gauß* zu den *Grundlagen der Geometrie* an, nämlich seine Entdeckung der *nichteuklidischen Geometrie,* die aus seiner langjährigen Beschäftigung mit dem euklidischen Parallelenaxiom und dem Problem, es aus den anderen Axiomen *Euklids* herzuleiten, entsprungen ist. Seit seinem 15. Lebensjahr war *Gauß* (wie viele seiner Zeitgenossen, z. B. auch sein ungarischer Studienfreund *Wolfgang Bolyai*) bemüht, einen solchen Beweis des Parallelensatzes zu finden, aber ohne jeden Erfolg.

Aber während alle anderen Forscher immer wieder neuen Beweisversuchen mit negativem Ende nachhingen, gab *Gauß* dem Problem eine positive Wendung, indem er versuchte, die Folgerungen streng zu entwickeln, die sich ergaben, wenn man das *Euklid*ische Parallelenaxiom fallen ließ und es durch ein gegenteiliges ersetzte. Er unternahm dabei diese Entwicklungen nicht mit dem Ziele, dabei einen Widerspruch aufzufinden, der dann indirekt die Notwendigkeit des euklidischen Axioms bewiesen hätte, so wie das vor ihm *Saccheri* (1733), *Lambert* (1766) und *Legendre* (1794) versucht hatten; sondern er war als erster innerlich darauf gefaßt, zu keinem Widerspruch sondern zu einer *neuen Geometrie* zu kommen..

Gauß bezeichnete seine neue Raumlehre zuerst als *antieuklidische Geometrie.* Er hat außer in brieflichen Äußerungen (an *Wolfgang Bolyai, Olbers, Gerling, Wachter, Taurinus, Schumacher, Bessel, Encke* und *Struve*) und in einigen Rezensionen von fremden Beweisversuchen, nie über diese neue Welt der Geometrie veröffentlicht, wahrscheinlich weil er voraussah, dann seine neuen Theorien gegen das geistige Beharrungsvermögen vieler

konservativer Mathematiker und aller Philosophen verteidigen zu müssen. *Gauß* fürchtete, wie er sagte, das *„Geschrei der Böotier".*

So wiederholte es sich wie bei den elliptischen Funkionen, daß jüngere Mathematiker den Ruhm der ersten Veröffentlichung des Systems der nichteuklidischen Geometrie ernteten, nämlich der Russe *Nikolaus Lobatschefskij* (1829) und der Ungar *Johann Bolyai* (1831), Sohn von *Gaußens* Studienfreund *Wolfgang Bolyai,* der sich selbst fruchtlos um den Beweis des Parallelenaxioms bemüht hatte.

Die wesentlichste Leistung von *Gauß* auf geometrischem Gebiet, neben seiner Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie, sind seine Beiträge zur *Flächentheorie,* die aus seinen *Überlegungen über die höhere Geodäsie* entsprangen. Ein Vorspiel zu seinen tiefgründigen Untersuchungen war seine der Kopenhagener Akademie eingereichte Preisschrift über die Aufgabe, *zwei Flächen in den kleinsten Teilen ähnlich (konform) aufeinander abzubilden,* deren Preis ihm 1823 zuerkannt wurde. Ausführlich hat *Gauß* seine völlig neuen Gedanken in seinen berühmten, für die *Differentialgeometrie* grundlegenden *„Disquisitiones generales circa superficies curvas"* von 1827 niedergelegt. Hier finden sich, ausgehend von den *Gauß*schen krummlinigen Koordinaten und der allgemeinen Form des Bogenelements, die *Gauß*sche sphärische Abbildung der Flächen und, daraus abgezogen, der Begriff der *Gauß*schen Krümmung einer Fläche in einem Punkte, die Unterscheidung der *inneren und der äußeren Flächentheorie,* wobei die innere sich nur auf die Flächenhaut bezieht, die äußere auch auf ihre Einbettung in den Raum, insbesondere der (noch sehr verwickelte) Nachweis dafür, daß die *Gauß*sche Krümmung eine innere Eigenschaft der Fläche ist (*„Theorema egregium"*), die *Gauß*sche Theorie der geodätischen Linien und der geodätischen Krümmung, der Satz, daß der Überschuß der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks über zwei Rechte der Totalkrümmung des Dreiecks gleich ist, und daraus folgend die *Gauß*sche Verallgemeinerung des *Legendre*schen Satzes über den Zusammenhang zwischen ebenen und sphärischen Dreiecken.

Die tiefen Nachwirkungen gerade dieser *Gauß*schen Schrift sind bekannt. Ein wichtiges Zeugnis dafür ist *Riemanns* Habilitationsvorlesung *„Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"* von 1854[1]) und die daran anschließende Entwicklung der *Riemann*schen Geometrie, deren Bedeutung für die allgemeine Relativitätstheorie von *Einstein* (1916) wohlbekannt ist.

Angewandte Mathematik, Astronomie und Geodäsie

Diese differentialgeometrischen Untersuchungen von *Gauß* sind aus der Problematik seiner geodätischen und astronomischen Arbeiten entwachsen, ebenso wie viele andere seiner Beiträge zur Geometrie, z. B. zur sphärischen Trigonometrie (*Gauß*sche Formeln, Pentagramma mirificum).

Wir betreten damit den Bereich der angewandten Mathematik, insbesondere den der höheren Geodäsie und theoretischen Astronomie. Im Jahre 1794 fand *Gauß,* als Schüler am Braunschweiger Collegium Carolinum die *Methode der kleinsten Quadrate,* zur zweckmäßigsten Ausgleichung von Beobachtungsfehlern. Deren Gedanke schien ihm so einfach, daß er auch später meinte, andere, z. B. der berühmte *Tobias Mayer,* müßten ihn längst gehabt haben, was aber nicht zutraf. Schon 1798 paßte *Gauß* seine neue

Methode den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung an und entwikkelte seine allgemeine Fehlertheorie (*Gauß*sches exponentielles Fehlergesetz). *Gauß* wollte trotz des Drängens der Freunde auch seine neue Fehlertheorie erst veröffentlichen, wenn ihm eine vollkommene Klärung der Grundlagen gelungen sei. So kam ihm diesmal *Legendre* (1806) mit der Veröffentlichung der Methode der kleinsten Quadrate zuvor. Im gleichen Jahre hatte *Gauß* seine „*Theorie der Bewegung der Himmelskörper*" auf deutsch vollendet, die aber erst 1807 erscheinen konnte, auf Wunsch des Verlegers auf lateinisch. Diese „*Theoria motus corporum coelestium*" enthält *Gaußens* wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, der später noch zwei weitere solche Begründungen folgten. Die letzte, 1821 bis 1823 in seinen beiden Teilen der „*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*" gegebene neue Begründung des Fehlergesetzes hielt er für die allein sachgemäße und ausschließlich zulässige Anknüpfung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die *Gauß*sche Ausgleichsmethode, deren Bedeutung für die messende Physik bekannt ist, hatte beim Erscheinen dieser Schriften schon vollgültige Bewährungsproben abgelegt, denn nur ihre Hilfe hatte dem 24jährigen *Gauß* 1801 seine populärste Leistung ermöglicht, die Wiederauffindung der Ceres, die *Piazzi* am Neujahrstag 1801 in Palermo als ersten der kleinen Planeten als Stern 8. Größe entdeckt hatte, aber nur durch 41 Tage auf einem kleinen Bogen ihrer Bahn (von etwa 9 Graden) beobachten konnte, wonach sie in den Strahlen der Sonne verschwand, ohne zunächst am Morgenhimmel wiedergefunden werden zu können. *Gauß* gelang es mit Hilfe seiner Ausgleichsmethode der kleinsten Quadrate, aus den Beobachtungen *Piazzis* eine Ephemeride von Ceres zu errechnen, die von der Wahrheit so wenig abwich, daß *Zach*, der Wiederentdecker von Ceres, äußern konnte, „die Ellipse des *Dr. Gauß*" stimme „*zur Bewunderung genau* mit der Stellung des Planeten überein".

Gauß schreibt hierüber in der Anzeige zu seiner klassischen „*Theoria motus corporum coelestium*": „Die bis dahin nie geahnte Möglichkeit, aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen eines Planeten eine schon sehr genäherte und zu seiner Wiederauffindung nach einem größeren Zeitraume überflüssig genaue Bestimmung seiner Bahn zu machen, war schon durch die Wiederauffindung der Ceres aufs schönste erwiesen und die Brauchbarkeit der angewandten Methode bewährt; und wenn über die Allgemeinheit dieser Brauchbarkeit noch Zweifel hätten übrigbleiben können, so sind diese durch ebenso glückliche Erfolge bei drei anderen seitdem entdeckten Planeten auf das vollkommenste weggeräumt".

Die 1802 erfolgende Entdeckung des zweiten kleinen Planeten *Pallas* durch *Olbers* brachte für *Gauß* neue mathematische Probleme. Denn die *Pallasbahn* zeigte eine sehr große Exzentrizität ($\varepsilon = 1/_5$) und eine sehr starke Neigung gegen die Ekliptik (34°); sie war daher Störungen durch die anderen Planeten, vor allem durch Jupiter und Saturn, besonders ausgesetzt. Die Rechnungen über die *Pallasstörungen* waren unerhört umfangreich und haben *Gauß* viele Jahre lang immer wieder beschäftigt; gleichwohl sind sie Fragment geblieben, gaben *Gauß* aber viel Gelegenheit zu neuen, rein mathematischen Forschungen.

Dem Problemkreise der Störungsrechnung entstammt vor allem die *Gauß*sche Arbeit über *mechanische Quadratur*. In dieser umfangreichen Abhandlung „*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*" gewinnt *Gauß* Quadraturformeln, welche die Möglichkeit bieten, durch geeignete (nicht äquidistante) Wahl einer vorgegebenen Anzahl n von Stützpunkten x_ν in dem Intervall [—1, +1] *jedes* von —1 bis +1 erstreckte bestimmte Integral mit einer Genauigkeit zu berechnen, die erst durch die *doppelte* Anzahl $2n$ äquidistanter Stützpunkte erreichbar wäre.

Seine schon erwähnte Methode, das vollständige elliptische Integral erster Gattung durch das arithmetisch-geometrische Mittel auszudrücken, findet sich dargestellt in jener berühmten Arbeit von 1818, in der *Gauß* eine sehr anschauliche Deutung der von einem Planeten ausgehenden *säkularen Störungen* gibt. *Gauß* denkt sich die Masse des Planeten umgekehrt proportional zur lokalen Umlaufsgeschwindigkeit über seine Bahn verteilt, und zeigt, daß die Anziehung dieses Rings auf einen anderen Körper genau die säkulare Störung des Körpers durch den Planeten gibt.

Nicht weniger als in seine astronomischen Arbeiten, derentwegen ihm 1807 die Leitung der neuen Sternwarte in Göttingen übertragen wurde, vertiefte sich *Gauß* in seine geodätischen Aufgaben. In allen Staaten ging man damals an exakte Landesmessungen. Die Gestalt der Erde im Kleinen und im Großen sollte durch möglichst genaue Messungen (Meridianmessungen, Breitenkreismessungen, Azimutalbestimmungen, Lotabweichungen, Zenitdistanzmessungen) ergründet werden. *Gauß* erhielt 1816 von der Regierung die Leitung der *Vermessung des Landes Hannover* übertragen, an der er jahrelang auch persönlich feldmesserisch teilgenommen hat, und deren mathematische Probleme ihn sehr interessierten. Neben den Problemen des Ausgleichs von geodätischen Beobachtungen war dies das schwierige Problem der genauen Erdgestalt und der exakten Kartenprojektion. Der daraus fließenden grundlegenden Arbeiten über konforme Abbildung von Flächen und allgemeine Flächentheorie wurde schon früher gedacht.

Von großer praktischer Bedeutung für die Landesaufnahme ist dabei die *Gauß*sche konforme Projektion der Kugelfläche in die Ebene geworden. Sie ist der von 1876 bis 1927 durchgeführten Preußischen Landesaufnahme zugrundelegt. Zur Ausgleichung der Dreieckspunkte zweiter bis vierter Ordnung benutzte man dabei die *Gauß*sche *konforme Doppelprojektion*, nämlich die Aufeinanderfolge einer konformen Übertragung des Erdellipsoids auf die Kugel und einer anschließenden konformen Abbildung der Kugel auf die Ebene.

Zur Erleichterung der geodätischen Beobachtungen erfand *Gauß* 1820 seinen auch heute noch vielgebrauchten *Heliotropen*, der durch die Konzentration reflektierter Sonnenstrahlen gut sichtbare Visierpunkte schaffen sollte. An *Bessel* schrieb *Gauß* damals über seine ausgedehnte geodätische Arbeit: „Ich schnitt überdies auch alle sichtbaren Objekte bei Gelegenheit und ich muß sagen, daß ich dieses Geschäft mit seinen täglichen Ausgleichungen so lieb gewann, daß mir das Bemerken, Ausmitteln und Berechnen eines Kirchturms wohl ebensoviel Vergnügen machte, wie das Beobachten eines neuen Gestirns. Vor Gott ist's am Ende auch wohl einerlei, ob wir die Lage eines Kirchturms auf einen Fuß oder die eines Sternes auf eine Sekunde bestimmt haben."

Ein Muster gedrängter *Gauß*scher Darstellung der Beobachtungen und umfassender Berücksichtigung aller Fehlerquellen bei der Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist die Abhandlung über die „*Bestimmung des Breitenunterschieds zwischen Göttingen und Altona*“ (1823), in der *Gauß* erstmals eine deutliche Definition der Erdgestalt gibt, die zur Grundlage für die weitere Entwicklung der höheren Geodäsie geworden ist.

Physik

Bei der Naturforscherversammlung in Berlin 1828, an der er als Gast von *Alexander v. Humboldt* teilnahm, lernte *Gauß* den jungen Hallenser Physiker *Wilhelm Weber* (1804—1890) kennen, der dann auf *Gaußens* Vorschlag 1831 als Ordinarius nach Göttingen berufen wurde. Unter *Webers* Einfluß befaßte sich *Gauß* fortan vor allem mit *physikalischen Fragestellungen*. Erst als *Weber* 1843 Göttingen verließ, um nach Leipzig zu gehen, verloren sich diese neuen Interessen ein wenig, und die geodätischen blühten wieder auf, wie die nun folgenden „*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*“ (1843/1846) belegen, in denen *Gauß* sich insbesondere mit der schon erwähnten konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel befaßte.

Die Frage nach dem angeblichen Niveauunterschied zwischen dem roten Meer und dem Mittelländischen Meer hatte *Gauß* 1812 den ersten Anstoß zu seiner neuartigen Behandlung der *Anziehung homogener elliptischer Sphäroide* gegeben, die vor ihm zuletzt *Legendre* (1788) auf sehr langwierigem Wege behandelt hatte.

Der bekannteste Beitrag von *Gauß* zur theoretischen Mechanik ist, außer kleineren Betrachtungen über die Hebelwaage, Doppelwägung usw., sein *Prinzip des kleinsten Zwanges*, dessen formale Verwandtschaft mit seiner Methode der kleinsten Quadrate er hervorhebt.

Neben der *Kapillaritätstheorie* (wobei die Methoden der Variationsrechnung ins Spiel kommen) hat *Gauß* vor allem die *Optik* durch seine berühmte *Abbildungstheorie* bereichert. Diese in seinen „*Dioptrischen Untersuchungen*“ (1840) niedergelegte *Gauß*sche Theorie optischer Systeme gibt erstmals die exakten Grundsätze, welche den Durchgang eines Lichtstrahls durch ein koaxiales Linsensystem beherrschen, wenn der Lichtstrahl gegen die Achse wenig geneigt ist. Im Gegensatz zu der vorherigen Behandlung des Problems durch *Cotes, Euler* und *Lagrange*, die nur unendlich dünne Linsen betrachteten, läßt *Gauß* beliebig dicke Linsen zu. Die Punkte der Achse entsprechen sich dann als Gegenstand und Bild kollinear, wobei die beiden Gegenpunkte (Fluchtpunkt und Verschwindungspunkt) die Brennpunkte des optischen Systems darstellen. Die Brennweiten sind dann als Abstände der Brennpunkte von den *Gauß*schen Hauptpunkten erklärt. Die *Entdeckung der Hauptpunkte* (Hauptebenen) des koaxialen optischen Systems ist das kennzeichnende Verdienst der *Gauß*schen Abbildungstheorie.

Die bedeutendsten Beiträge von *Gauß* zur Physik sind jedoch seine *erdmagnetischen Untersuchungen*, zu denen er durch *Alexander v. Humboldt* angeregt wurde, der nach seiner berühmten Reise nach Südamerika einen die ganze Erde umfassenden „Verein zum Zwecke erdmagnetischer Beobachtungen“ gegründet hatte. Bei diesen erdmagnetischen Studien, für welche in Göttingen das erste erdmagnetische Observatorium geschaffen wurde, war *Weber* für *Gauß* ein ebenso wertvoller Mitarbeiter wie fördernder Anreger. Mit der Zusammenarbeit des Mathematikers *Gauß* und des Physikers *Weber* begann damals eine Tradition, die für Göttingen später verpflichtendes Vorbild wurde.

Zunächst wurden von *Gauß* die *Meßmethoden* der *Intensität des Erdmagnetismus* kritisch untersucht und ein *absolutes Maß* für sie eingeführt (1832). Diese magnetischen Messungen waren überhaupt der Anlaß zur Aufstellung eines allgemeinen absoluten physikalischen Maßsystems durch *Gauß* und *Weber*. Im Zusammenhang damit erinnert man sich daran, daß im letzten Kriege die Engländer Verfahren zur Beseitigung der gefährlichen magnetischen Felder rund um ein Schiff als „entgaußen“ (= entmagnetisieren, „to degauss“) bezeichnet haben.

Gauß und *Weber* unternahmen sodann ausgedehnte Messungen über die *örtlichen* sowie über die kurz- und langfristigen *zeitlichen Schwankungen* der (horizontalen, vertikalen und absoluten) Intensität. Das Ergebnis dieser vergleichenden Beobachtungen war, daß die kleinen, nur Augenblicke dauernden Störungen der Magnetnadel an allen Orten gleichzeitig und mit gleichen Intensitäten und in korrespondierenden Richtungen stattfinden. Seit 1851 weiß man, daß die täglichen Ablenkungen der Magnetnadel eine Periode von 11 Jahren aufweisen, also ungefähr dieselbe Periode, welche man bei den Sonnenflecken und den von ihnen verursachten magnetischen Stürmen beobachtet.

Die Göttinger Beobachtungsergebnisse wurden von 1836/37 an in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins“ herausgegeben, in denen sich auch die grundlegenden theoretischen Arbeiten von *Gauß* über die „*Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*“ (1838/39) und die „*Allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte*“ (1839/40) finden.

In der „*Allgemeinen Theorie*“ wird zunächst der merkwürdige Satz gezeigt: Ist die nach *Norden* gerichtete Komponente der magnetischen Horizontalkraft auf der *ganzen* Erdoberfläche bekannt, so folgt daraus die nach *Westen* (oder Osten) gerichtete Komponente; *nicht aber umgekehrt* aus der westlichen die nördliche, es sei denn, man kenne die Nordkomponente auf irgend einer den Nord- und Südpol verbindenden Linie.

Vor allem aber werden die damaligen erdmagnetischen Beobachtungen dazu benutzt, das *Potential* und die (daraus ableitbaren) *Komponenten der erdmagnetischen Kraft* in radialer, nördlicher und westlicher Richtung in jedem Punkte der Erdoberfläche und des Außenraumes der Erde (über den Innenraum können aus potentialtheoretischen Überlegungen keine Folgerungen gezogen werden) durch eine *Entwicklung nach Kugelfunktionen* möglichst genau darzustellen, wobei *Gauß* bis zu den Gliedern 4. Ordnung (einschließlich) geht. Die vorhandenen Intensitätsdaten gestatteten mit je zwölf äquidistanten Punkten auf sieben Parallelkreisen zu arbeiten. *Gauß* berechnete durch entsprechende Ausgleichsmethoden die 24 nötigen Entwicklungskoeffizienten („*Elemente der Theorie des Erdmagnetismus*“) und erhielt „billige Übereinstimmung“ mit den vorhandenen Beobachtungen. Insbesondere konnte *Gauß* aus seinen Entwicklungen die annähernden *Lagen der magnetischen Pole*, vor allem des Südpols, berechnen, die nicht auf einem Durchmesser liegen, und die sich später gut bestätigt haben. Schließlich berechnet *Gauß* auch noch das magnetische Moment der Erde bezüglich ihrer magnetischen Polachse.

In den *„Allgemeinen Lehrsätzen“* gibt *Gauß*, aufbauend auf älteren Ergebnissen von *Lagrange* (1773), *Laplace* (1773) und *Poisson* (1813), die *mathematischen Grundlagen der Potentialtheorie.* Hier findet sich auch der bekannte *Gauß*sche Integralsatz und alle grundlegenden Sätze der Potentialtheorie für das *Newton*sche Anziehungsgesetz in klassischer Vollständigkeit dargelegt, sowohl für den Fall diskreter als auch im Falle kontinuierlicher Massenverteilung, inbesondere die *Gauß*schen potentialtheoretischen Minimumsätze.

Die Beobachtung des Erdmagnetismus, für die er gemeinsam mit *Weber* eigene Instrumente, wie sein Magnetometer, schuf, hat *Gauß* zu verschiedenen neuen experimentellen Verfahren und Einrichtungen angeregt, die den Fundus der beobachtenden Naturwissenschaften bereichert haben: Bifilaraufhängung, Spiegelablesung, logarithmisches Dekrement einer exponentiell abklingenden Erscheinung sind einige davon.

Neben dem Magnetismus wandte *Gauß* sein Interesse auch Fragen der *mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkungen* zu, vor allem dem Problem der Intensität in den einzelnen Teilen eines galvanischen Stromnetzes und der gegenseitigen Wirkung bewegter Stromkreise aufeinander. Hier findet sich auch die berühmte Integralformel für die Verschlingungszahl zweier geschlossener (oder unendlicher) Linien.

Eine der populärsten Leistungen von *Gauß* und *Weber* ist die Erfindung des *elektromagnetischen Telegraphen. Gauß* war sich der Bedeutung dieser Neuerung bewußt und er sah voraus, daß aus der kurzen Strecke zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Institut in Göttingen dereinst ein die ganze Welt umspannendes Telegraphennetz entstehen würde.

*

Das äußere Leben von *Gauß* verlief verhältnismäßig ruhig. Seit 1807 war er Leiter der Göttinger Sternwarte und Professor der Mathematik. 1824 versuchte *Alexander v. Humboldt* vergeblich, ihn für Berlin als Direktor der geplanten Polytechnischen Schule zu gewinnen. *Gauß* sollte in Berlin von Vorlesungen, die ihm stets verhaßt waren, entbunden sein, er sollte vielmehr alle Forschungsstätten des Staates wissenschaftlich beaufsichtigen.

*Gauß*ens Einkommen war zeit seines Lebens sehr schmal; erst bei den weitläufigen und verantwortungsvollen Arbeiten an der Landesvermessung und Gradmessung stieg es auf jährlich 2500 Taler. Auch familiäre Sorgen bedrängten ihn sehr. Seine Frauen starben vorzeitig, sein Sohn *Eugen* überwarf sich mit ihm und wanderte nach Amerika aus. Sein Sohn *Joseph*, der Offizier wurde, war ihm dagegen bei seinen Vermessungen ein treuer Helfer.

Gauß starb, in allen Ländern hochgeehrt, im Alter von 78 Jahren in Göttingen am 23. Februar 1855.

Vielleicht hat sein Jugendfreund *Wolfgang Bolyai* seine verschlossene und bescheidene Persönlichkeit am besten beschrieben. In seiner Selbstbiographie erzählt er: „In Göttingen wurde ich mit dem damals dort studierenden *Gauß* bekannt, mit dem ich noch heute in Freundschaft bin, obgleich weit entfernt, mich mit ihm messen zu können. Er war sehr bescheiden und zeigte wenig. Nicht drei Tage wie mit *Plato*, jahrelang konnte man mit ihm zusammensein, ohne seine Größe zu kennen.“