I. Festrede des Rektors Prof. Dr. Rudolf Fueter.

Der mathematische Gedanke.

Die mathematische Gedankenarbeit ist für einen Grossteil der gebildeten Kreise ein vollständiges Rätsel. Die einen sehen im Mathematiker einen Forscher, der emsig Zahlen unter Zahlen setzt; andere glauben, dass er im Besitze einer geheimnisvollen Methode sei, die den Beweis der Entstehung und des Geschehens der Welt erbringen könne. Im folgenden will ich versuchen, klarzulegen, worin in Wirklichkeit Aufgabe, Arbeitsmethode und Ziel der mathematischen Forschung besteht.

Meine Ausführungen müssen notgedrungen die Charakterisierung des *mathematischen Gedankens* in den Mittelpunkt stellen; denn gerade dieser, seine Schöpfung und Zergliederung bildet die Arbeit des reinen Mathematikers. Seine Erfassung ist der Schlüssel, der die Tore zu den mathematischen Gefilden öffnet, und seine Unkenntnis bedingt Verständnislosigkeit gegenüber den exakten Wissenschaften.

Um Ihr Verstehen zu gewinnen, wähle ich aus dem Gebäude mathematischer Spekulation zwei der wichtigsten Begriffe der modernen Forschung aus. Im folgenden werde ich mit Ihnen die Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte derselben durchgehen und Sie so am einfachsten mit Wert und Inhalt der Begriffe vertraut machen. Die historisch-genetische Methode bringt nicht nur dem Forscher unentbehrliche Anregung, sondern sie ist auch der schönste Weg zum tiefern Eindringen in die mathematische Gedankenwelt.[1])

Wie entsteht ein mathematischer Gedanke? Den ersten Anstoss gibt stets ein *spezielles* einfaches Problem.[2]) Die exakten

[1]) Nur muss sie sich auf den Zeitraum beschränken, während dem die allgemeine Bedeutung eines Gedankens sich durchgesetzt hat. Es ist falsch, einen Gedanken in viel ältere Schriften hineinlesen zu wollen. Sicherlich wird jeder Begriff äusserlich schon früher aufzufinden sein. Die Eulersche Aufstellung der Riemann-Cauchyschen Differentialgleichungen ist z. B. für die Geschichte der Funktionentheorie belanglos. Siehe *P. Staeckel*, Bibliotheca math., 3. Folge (1900), pg. 109 u. ff.

[2]) Vgl. *H. Poincaré:* Verhandlungen des ersten int. Math.-Kongresses, Leipzig, Teubner, 1898, pg. 86 u. ff.

Naturwissenschaften und die Zahlenaufgaben, wie sie die antike, insbesondere die indische Mathematik liebte, liefern eine Fülle von solchen. Mein erstes Beispiel entspringt der alten Frage nach den Wurzeln einer algebraischen Gleichung, diesem Grundproblem der Algebra. Schon das Altertum konnte Gleichungen ersten und zweiten Grades auflösen und ist dadurch zur Definition imaginärer Zahlen geführt worden.[1]) Die Gleichungen dritten und vierten Grades sind allgemein erst im 16. Jahrhundert bezwungen worden. Einer der grössten Geister des 18. Jahrhunderts, der Mathematiker *Joseph-Louis Lagrange*, hat im Jahre 1770 in der durch die Klarheit und Durchsichtigkeit des Aufbaus, durch die Leichtigkeit der Beweisführung ausgezeichneten Abhandlung: „Réflexions sur la résolution algébrique des équations"[2]) die Frage behandelt, ob nicht auch Gleichungen höhern Grades auflösbar seien? Die Methode, die ihn zu einer Beantwortung hinführt, trägt die typischen Merkmale jeder fruchtbaren Untersuchung: *Lagrange will zuerst das schon Erforschte der tiefern Bedeutung nach verstehen lernen.* Vor ihm hatte der Mathematiker ein einziges Ziel im Auge: Ein Formelgebilde anzugeben, das formal die Wurzeln der Gleichung darstellt. So war die Epoche eines *Cardanus* durch Kunstgriffe und Zufälligkeiten zu der bekannten Auflösung der Gleichung dritten Grades geführt worden. Die Formelnsymbole bestanden in einer Ineinanderschachtelung von Wurzelzeichen. Merkwürdigerweise steht noch heute mancherorts der Mittelschulunterricht auf diesem vor-Lagrangeschen Standpunkte. Lagrange aber wollte den *innern* Grund der speziellen Auflösungen verstehen, um so Gedanken für den allgemeinen Fall zu erhalten.[3]) Warum, fragt er, führt die Cardanische Auflösung einer Gleichung *dritten* Grades auf eine Resolventengleichung *sechsten* Grades?[4]) Die Antwort deckt das Geheimnis völlig auf. Lagrange drückt die Wurzeln der Resolvente durch die Wurzeln der kubischen Gleichung aus und erkennt, dass die sechs Werte

[1]) *M. Cantor:* Vorlesungen über Geschichte der Math., I. Bd., 2. Aufl. Leipzig 1894, pg. 375.

[2]) *Oeuvres de Lagrange*, t. III. Paris, Gauthier-Villars. 1869. pg. 205.

[3]) *Lagrange*, a. a. O. pg. 206.

[4]) *Lagrange*, a. a. O. pg. 208 u. ff.

durch die sechs Permutationen der drei kubischen Wurzeln erhalten werden. Allgemein ist der Grad einer rationalen Funktion der Wurzeln gleich der Anzahl der Werte, die die Funktion bei allen Permutationen der Wurzeln annehmen kann.[1]) Der neue mathematische Gedanke war geschaffen! Zwei scheinbar fernliegende Gebiete, Kombinatorik und Wurzelberechnung, wurden zusammen verknüpft. Dadurch, dass auf bestimmte Grössen Operationen, nämlich Permutationen, ausgeübt werden, ist das Fundament, auf dem die moderne Algebra und Zahlentheorie sich aufbaut, gelegt worden. Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit mathematischer Möglichkeiten hat Lagranges grosser Geist die folgenschwerste herausgeholt.

Lagrange, den Napoleon I. später „la haute pyramide des sciences mathématiques"[2]) nannte, war zur Zeit dieser Entdeckung eine europäische Berühmtheit. Für die Wirkung eines mathematischen Gedankens ist dieser Umstand nicht zu unterschätzen. Wie oft sind Erfolge unwirksam geblieben, weil der Verfasser unbekannt war und nicht gelesen wurde; seine Resultate mussten später von andern wieder aufgefunden werden. Lagranges Lebensschicksale schlossen dies von vornherein aus. 1736 in Turin geboren, war er schon mit 19 Jahren Professor an der dortigen Militärakademie geworden und 1766 auf Anraten *Eulers* als Direktor der wissenschaftlichen Abteilung der Akademie nach Berlin berufen worden. Diese ideale Stellung liess dem grossen Schweiger, als welcher Lagrange berühmt war, während zwanzig Jahren eine beneidenswerte Musse zur schöpferischen Arbeit. Erst 1787 zog er nach Paris, wo er unangefochten von Revolution und Kaiserreich, dank seiner echt mathematischen Skepsis und Zurückhaltung politischen Fragen gegenüber, bis zu seinem Tode 1813 verblieb.[3])

Gleichzeitig ist der weniger berühmte *N. Vandermonde*[4]) zu teilweise gleichen Resultaten wie Lagrange gekommen. Er

[1]) *Lagrange*, a. a. O. pg. 216, 371 u. ff.

[2]) The Encyclopaedia Britannica, vol. XVI. Cambridge 1911, pg. 77.

[3]) *Oeuvres de Lagrange*, t. I. Paris, Gauthier-Villars, 1867, pg. XL u. ff.

[4]) *Vandermonde:* „Mémoire sur la résolution des équations". Histoire de l'académie royale des sciences, année 1771. (Paris 1774.)

besass aber keinen Weltruf und erzielte weniger Einwirkung, so dass ich seine Arbeiten hier übergehe.

Unter denjenigen, die Lagranges Ideen aufnahmen, ist vor allem *Paolo Ruffini* zu nennen. Lange Zeit vernachlässigt, haben seine Werke erst 1915 zu erscheinen begonnen.[1]) Dieser merkwürdige Geist und seine Ideen können nur in Verbindung mit seinem ebenso merkwürdigen Leben richtig verstanden und eingeschätzt werden. Ruffini ist eine jener interessanten und komplizierten Naturen, die nicht nur für eine einzige Wissenschaft ausgesprochene Begabung besitzen. Geboren 1765 in Valentano, wollte er zuerst Priester werden, schwenkte aber im 12. Lebensjahre, schon tonsuriert, zur Medizin ab. Auch diese befriedigte ihn nicht völlig, so dass er gleichzeitig Mathematik studierte. Vom 23. Lebensjahre an ist er in der grotesken Lage, in Modena die Professur für Mathematik zu bekleiden und zugleich als Arzt eine ausgedehnte Praxis zu besitzen. Diese Doppelstellung hatte ihre Schattenseiten; sie bedingte trotz Ruffinis Ideenreichtum einen gewissen Dilettantismus.[2]) Zu einer wirklichen Verarbeitung der Forschungen mangelte die Musse. Erst dem glücklichen Umstande, dass Ruffini 1798 dadurch, dass er sich weigerte, den Franzosen den Treueid zu leisten, alle Stellungen verlor, ist es zu verdanken, dass er an die Vertiefung und Ausarbeitung seiner mathematischen Gedanken gehen konnte. 1799 erschien sein Hauptwerk: „Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto".[3]) Diesem Werk fehlt die klare Durcharbeitung des mathematischen Gedankens und dadurch die mathematische Akribie. Trotzdem bedeutet es eine weitere Etappe für unsern Gedanken. Die Untersuchung fusst auf der Lagrangeschen Idee, die Permutation der Wurzeln als neue Operation einzuführen,

[1]) *Opere matematiche di Paolo Ruffini*, t. I. Palermo 1915. Siehe auch über Ruffini: *H. Burkhardt*, Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. Zeitschrift für Math. und Physik, XXXVII (1892), pg. 119.

[2]) Ruffini soll in Modena dafür berühmt gewesen sein, dass er jedes Jahr eine neue Theorie über den Typhus aufstellte (Nouv. biographie général, Paris 1857, t. 41, pg. 867).

[3]) Opere mat. a. a. O. pg. 1.

greift aber die Operation selbst als Objekt der Gedankenarbeit heraus. Der Entwicklungsgang des Gedankens tritt darin klar und deutlich hervor: Die Abstraktionstätigkeit geht von der einfachen Ausübung einer Operation zur Verarbeitung derselben als neuem logischen Begriff über. Insbesondere greift Ruffini aus den $n!$ möglichen Vertauschungen von n Dingen besondere Klassen heraus und unterwirft sie seiner Forschung.

Noch zu Ruffinis Lebzeiten sind seine Ansätze von *Augustin Cauchy*[1]) aufgenommen worden. Aus dem unklaren und verschwommenen Ideenreichtum Ruffinis machte Cauchy eine enger begrenzte, klare und brauchbare Theorie. Statt von Permutationen spricht er von *Substitutionen*,[2]) ein feiner, aber tiefer Unterschied! Ist die Permutation die neue Anordnung von n Elementen, so bedeutet die Substitution die Operation selbst der Neuordnung. Cauchy zeigt, dass zwei Substitutionen nacheinander ausgeführt, durch eine einzige ersetzt werden können[3]) und definiert die Einheitssubstitution.[4]) Von selbst ergibt sich so die Zusammensetzung oder Multiplikation der Substitutionen. Klar und konsequent werden die Lagrangeschen Anschauungen weitergeführt.

Vielleicht zeigt keine andere Wissenschaft so durchsichtig wie die Mathematik, dass eine neue Errungenschaft niemals von einem einzigen Geiste erschaffen werden kann, sondern dass jeder Forscher wie bei der Erbauung mächtiger Kathedralen früherer Zeiten das Gedankengebäude dort weiterführt, wo es der Vorgeher hat stehen lassen. Besonders fruchtbare Wirkung wird erzielt, wenn derselbe Gedanke auf zwei scheinbar ganz getrennten Wegen angetroffen und gefördert wird. Auf diese Erscheinung führt auch die Betrachtung unseres Problemes. *Carl Friedrich Gauss* hat mit 18 Jahren die Frage angepackt, ob ein reguläres Siebzehneck mit Zirkel und Lineal im Innern

[1]) *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*, II. série, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1905, pg. 64: „Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme".

[2]) *Cauchy*, a. a. O. pg. 67 u. 72.

[3]) *Cauchy*, a. a. O. pg. 73.

[4]) *Cauchy*, a. a. O. pg. 73.

eines gegebenen Kreises konstruiert werden kann. Das Göttinger Gauss-Archiv besitzt ein unscheinbares Heftchen mit grünen Pappdeckeln, das *mathematische Tagebuch von Gauss.*[1]) Die erste Eintragung verzeichnet unter dem 30. März 1796 die Entdeckung, dass die Konstruktion durchführbar ist. Diese grossartige Leistung des Göttinger Studenten Gauss ist im „Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung" in Leipzig vom 1. Juni 1796 publiziert worden. Gauss fügt etwas von oben herab hinzu, dass der Satz nur ein „Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von grösserem Umfange" sei.[2]) Diese Theorie bestand in der Auflösung besonderer algebraischer Gleichungen und ist grundlegend für die Entwicklung des mathematischen Gedankens geworden, dessen Darstellung ich unternehme. Auch damals war, wie heute, der Krieg wissenschaftlicher Produktion feindlich, und Gauss konnte erst 1801 seine Ideen in den klassischen „disquisitiones arithmeticae",[3]) der Bibel des Zahlentheoretikers, veröffentlichen. Der grosse Vorteil von Gauss seinen Vorgängern gegenüber bestand darin, dass er sich einer *speziellen* Gleichung vom 16. Grade gegenüber sah, und sich fragen musste, ob dieselbe durch Quadratwurzeln gelöst werden könne?[4]) Denn darauf kommt die Möglichkeit der geometrischen Konstruktion des Siebzehneckes heraus. Immer und immer wieder ersieht man, dass diese *speziellen* Probleme gegenüber den *allgemeinen*, wie sie Lagrange stellte, weiter führen. Die spezielle Aufgabe führte Gauss zunächst zur Zahlentheorie; sie zwang ihn als Vorarbeit, die Fragen der natürlichen Zahlen durchzudenken. Anderseits führte sie ihn dazu, die gegebene Gleichung und allgemeiner jede Kreisteilungsgleichung in modernstem Sinne aufzulösen. Hätte Gauss die moderne Algebra gekannt, er hätte seine Probleme nicht tiefsinniger und richtiger anpacken und zu Ende denken können. Die allgemeine Theorie der Substitutionen hat durch ihn begrifflich keine direkte, aber eine umso nachhaltigere indirekte Förderung erfahren. Nun

[1]) *C. F. Gauss' Werke*, Bd. X. I. Göttingen 1917, pg. 488 u. ff.
[2]) *C. F Gauss*, a. a. O. pg. 3.
[3]) *C. F. Gauss' Werke*, Bd. I, Göttingen 1870, pg. 1.
[4]) Vgl. auch *P. Bachmann:* „Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten". Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Gött., math.-physik. Kl., 1911, pg. 24 u. ff.

lag eine wunderbare, bis in alle Einzelheiten vollkommen durchgeführte Auflösung einer grossen Klasse von algebraischen Gleichungen vor aller Augen. Es erübrigte noch, die allgemeinen Begriffe herauszuarbeiten.

Dies ist zunächst von *Niels Henrik Abel*, dem genialen norwegischen Mathematiker, geschehen. Abels mathematischer Ausgangspunkt ist die Frage der Auflösung einer Gleichung fünften Grades gewesen, und er hat im Jahre 1824, zweiundzwanzigjährig, den ersten strengen Beweis der Unmöglichkeit, eine solche Gleichung allgemein durch Wurzelzeichen zu lösen, erbracht. Für die Betrachtung der Entwicklung unseres mathematischen Gedankens kommt diese Arbeit weniger in Betracht; denn das Rüstzeug hat Abel der oben besprochenen *Cauchy*schen Untersuchung entnommen,[1]) während er *Ruffini* nicht verstanden zu haben scheint.[2]) Dagegen hat die Lektüre von *Gauss* Abel zu einer Abhandlung von grösster Wichtigkeit angeregt; sie ist 1828 unter dem Titel: „Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement"[3]) erschienen. Nach dem Vorbilde Lagranges sucht Abel den tiefern Grund der Gauss'schen Auflösung zu verstehen und erkennt, dass die letztere durch zwei Eigenschaften der Kreisteilungsgleichungen bedingt ist: Erstens kann jede Wurzel auf besondere Weise aus irgend einer einzigen berechnet werden, und zweitens erhält man jedes Mal dieselbe Wurzel, wenn man die so erhaltene Wurzel zur Berechnung einer weitern Wurzel verwendet und die Reihenfolge der beiden Wurzeln vertauscht. Abel definiert umgekehrt eine Gleichung durch diese beiden Eigenschaften und beweist, dass sie immer algebraisch auflösbar ist. Die Durchführung zeigt, dass auch jetzt der Brennpunkt der Untersuchung in speziellen Eigenschaften der Permutationen der Wurzeln liegt. Es handelt sich nicht mehr um *alle* möglichen Permutationen, sondern um eine *besondere Auswahl* von solchen. Diese schreibt Abel untereinander und nennt sie die *Gruppe* der Glei-

[1]) *Niels Henrik Abel:* Oeuvres complètes. Nouvelle édition. Christiania, Grøndahl & Søn, 1881, t. I, pg. 79.
[2]) *N. H. Abel:* Oeuvres complètes a. a. O., t. II, pg. 218.
[3]) *N. H. Abel:* Oeuvres complètes a. a. O., t. I, pg. 478.

chung.[1]) Der Name Gruppe ist später auf eine bestimmte Gesamtheit von Operationen übertragen worden, und der mathematische Gedanke, den ich zu charakterisieren versuche, ist *Gruppenbegriff* genannt worden. Die speziellen Gleichungen, für die Abel seine Theorie entwickelt hat, heissen noch heute Abelsche Gleichungen.

Sie ersehen aus dem Gang der Entwicklung, wie der mathematische Gedanke zuerst latent in speziellen Fällen auftritt, wie er dann in diesen speziellen Fällen herausgegriffen und abstrakt formuliert wird. Jetzt muss noch die dritte Stufe erklommen werden: Die Abstraktion ist so weit zu fördern, dass der Gedanke vom speziellen Fall unabhängig wird. Derjenige, der dies durchführte, war der Franzose *Evariste Galois.*

d'Alembert sagt in seiner Lobrede auf Jacob Bernoulli:[2]) „J'ignore les détails peu intéressants de sa vie privée". Ich stehe nicht auf diesem Standpunkte, sondern glaube, dass bei jedem Gelehrten Leben und wissenschaftliches Werk ein untrennbares Ganzes bildet. Ich denke etwa an die Notiz, die Gauss unter dem 23. Oktober 1813 in sein vorhin erwähntes mathematisches Tagebuch eingetragen hat: „Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum *generalis*, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die, quo filius nobis natus est."[3]) Ich werde deshalb bei *Galois*, dessen Leben ein ungewöhnliches und abenteuerliches war, und dessen Bedeutung für die moderne Mathematik eine enorm grosse ist, länger verweilen.

In seinen kulturgeschichtlich interessanten Memoiren erzählt *Alexandre Dumas père* aus der Zeit der Pariser Julirevolution folgende Episode:[4]) Am 9. Mai 1831 kamen etwa zweihundert ehemalige Revolutionäre und Republikaner bei einem Bankett zusammen, um die Freilassung einiger Gesinnungsgenossen zu feiern. Alles ging gut, bis der Inhalt der Champagnerflaschen, „qui commençaient à simuler une fusillade assez

[1]) *N. H. Abel:* Oeuvres complètes a. a. O., t. I, pg. 482 u. ff.
[2]) *d'Alembert:* Oeuvres phil., hist. et litt. Paris 1805, t. 6, pg. 111.
[3]) *C. F. Gauss' Werke*, Bd. X. I. Göttingen 1917, pg. 571.
[4]) *Mémoires d'Alex. Dumas*, deux. série, t. V. Bruxelles 1854, pg. 77 u. ff.

bien nourrie"[1]) die Geister erhitzte. Improvisierte Reden wurden gehalten. Plötzlich erhob sich 15 bis 20 Schritt von Dumas ein junger Republikaner *Evariste* „*Gallois*" (sic), in der Hand sein Glas und ein offenes Dolchmesser und schrie: „A Louis-Philippe!" Worauf es Dumas für geboten hielt, durchs Fenster zu verschwinden. Galois wurde für seinen Toast ins Gefängnis geworfen, aber schon am 15. Juni vom Assisengericht freigesprochen. „Tenaient-ils Gallois pour un fou, ou étaient-ils de son avis", fragt Dumas?[2]) Galois hatte alles zugegeben, nur bemerkt, dass er dem Ausruf „à Louis-Philippe" die Worte „s'il trahit" hinzugefügt habe. Nach dem Freispruch nahm er vom Gerichtstisch ruhig das ominöse Messer, klappte es zu, grüsste und entfernte sich.[3]) Jedenfalls wusste weder Dumas noch sonst jemand, dass einer der hervorragendsten Mathematiker des 19. Jahrhunderts vor ihnen stand.

Galois war damals 20 Jahre alt. Geboren 1811 in Bourg-la-Reine als Sohn gebildeter Eltern (sein Vater stand einer Pension vor), tritt er mit 12 Jahren in das Pariser Lycée Louis-le-Grand ein. Bis zum 15. Lebensjahre ist er der normale Schüler, der sich besonders auch in Sprachen auszeichnet. Mit dem Moment der Pubertät, 1826, wechselt sein Charakter völlig: er vernachlässigt alles mit Ausnahme der Mathematik, die er heisshungrig verschlingt. Er liest Lagrange und Gauss mit grösster Leichtigkeit. „La fureur des mathématiques le domine" schreibt einer seiner Lehrer,[4]) während ein anderer von ihm sagt: „il est toujours occupé de ce qu'il ne faut pas faire",[5]) was allerdings nichts aussergewöhnliches ist. Infolge seines finstern und verschlossenen Charakters muss Galois ein unbequemer Schüler gewesen sein. Mit seinen Examen und seiner Beförderung happert es. Trotz den liberalen Ansichten seines Vaters glaubt er sich eingeengt und äussert wirre Kinderwünsche und allgemeine Schlag-

[1]) *Mémoires d'Alex. Dumas* a. a. O. pg. 79.
[2]) *Mémoires d'Alex. Dumas* a. a. O. pg. 98.
[3]) *Mémoires d'Alex. Dumas* a. a. O. pg. 98.
[4]) *P. Dupuy:* La vie d'Evariste Galois. Annales sc. de l'école norm. sup., 3e série, t. 13 (1896), pg. 208. Vgl. auch *R. d'Adhémar:* Evariste Galois. La Revue du mois, t. VI (1908), pg. 426.
[5]) *P. Dupuy* a. a. O. pg. 207.

worte. All dies wäre vielleicht ohne Folgen geblieben, wenn nicht eine Reihe wirklicher Schicksalsschläge hinzugetreten wären. Sein Vater nimmt sich (1829) das Leben. 1828 fällt er zum ersten Male, 1829 zum zweiten Male beim Eintrittsexamen in die Ecole Polytechnique durch, und zwar speziell in Mathematik, weil er dem bekannten Mathematiker *Binet* in der Algebraprüfung seine eigene Theorie auseinandersetzt, die jener absolut nicht versteht. Galois ist nämlich in diesem Jahr nicht nur tief in Lagrange, Gauss und Abel[1]) eingedrungen, sondern hat weit über letztern hinaus eine eigene Theorie gefunden, die er in einer Abhandlung zusammengefasst *Cauchy* einreicht.[2]) Cauchy verliert dieselbe. Nach Galois' Eintritt in die ihm unsympathische Ecole Normale (1830) reicht er eine neue Abhandlung der Académie des sciences ein; der Referent *Fourier*[3]) stirbt, bevor er sein Urteil abgegeben hatte, und die Arbeit verschwindet im Nachlass. Eine dritte Abhandlung wird von *Lacroix* und *Poisson*[4]) refusiert.

Unter dem Eindruck dieser unglückseligen Fügungen tritt Galois in die Periode der Julirevolution ein. Voll unklarer politischer Ideen, ohne eigentliche Überzeugung, beherrscht ihn das unbestimmte Gefühl, sich aufopfern zu müssen. Am 9. Dezember 1830 wird er wegen eines politischen Skandals mit dem Direktor aus der Ecole Normale ausgestossen.[5]) Er hält daraufhin privatim eine Vorlesung über Algebra vor zirka 40 Zuhörern.

1) Für den Mathematiker ist der Einfluss von Abel auf Galois eine der interessantesten Fragen. Leider bringt auch die Veröffentlichung der Manuskripte von Galois (*Manuscrits de Evariste Galois*, publiés par *Jules Tannery*, Paris, Gauthier-Villars, 1908) keine Klärung. Es scheint beinahe, als ob Galois nichts über seine Beziehungen zu Abels Abhandlungen habe hinterlassen wollen. Während Gauss bei jeder Gelegenheit genannt wird, findet sich der Name Abel nur in Verbindung mit Fragen der elliptischen Funktionen oder der Nichtauflösbarkeit der Gleichung fünften Grades (siehe *Oeuvres math. d'E. Galois*, Paris, Gauthier-Villars, 1897, pg. 31 und 37; *Manuscrits d'E. Galois*, pg. 22, 24, 34). Die Notiz, Manuscrits pg. 24, die vom Jahre 1831 stammt, lässt eine gewisse Rivalität erkennen. Siehe auch die Notiz über den ausradierten Namen, Manuscrits, pg. 12.

2) *P. Dupuy* a. a. O. pg. 209.

3) *P. Dupuy* a. a. O. pg. 217.

4) *Manuscrits d'E. Galois* a. a. O. pg. 5, 6 und 7.

5) *P. Dupuy* a. a. O. pg. 228

Im Mai 1831 folgt die vorhin erzählte Bankettaffaire. Schon am 14. Juli wird er aufs neue verhaftet wegen Tragens einer Uniform bei einem Krawall und zu sechs Monaten Gefängnis verurteilt. Im Gefängnis „de Sainte-Pélagie" gerät er in eine richtige Saufgesellschaft, kommt ins Spital, macht dort die Bekanntschaft einer Dirne und lässt sich vier Wochen nach der Entlassung wegen dieser in ein Duell ein, das ihm am 30. Mai 1832, in seinem 21. Lebensjahre, den Tod bringt. Sein Gegner ist Pécheux d'Herbinville, der spätere Konservator des Schlosses Fontainebleau „ce charmant jeune homme qui faisait des cartouches en papier de soie, nouées avec des faveurs roses', nach Dumas Erzählung.[1])

So unklar und verworren Galois' politische Ansichten, so reif und durchsichtig sind seine wissenschaftlichen Gedanken. Wunderbar ist stets der Einblick in die Gegensätze, die ein genialer Mensch in sich vereinigen kann. Alles, was Galois im 20. und 21. Lebensjahre wissenschaftlich geschrieben hat, ist von hervorstechender Prägnanz des Ausdruckes. Mit bezwingender Durchsichtigkeit entwirft er noch am Vorabend seines Duells sein wissenschaftliches Testament,[2]) eines der interessantesten Dokumente mathematischer Geistesarbeit; der beste Beweis für Galois' Verarbeitung und Beherrschung seines mathematischen Gedankens. Kein anderer, ausser *Abel*, ist so tief in Gauss' Theorie der Kreisteilung eingedrungen! Kein anderer hat sich so von allem formalen dieser Theorie freizumachen gewusst! Während *Abel* noch die analytische Beziehung zwischen den Wurzeln als Ausgangspunkt wählt, zeigt Galois, dass eine ganz bestimmte Anzahl von Permutationen der Wurzeln den Kern trifft. Diese Auswahl besitzt das charakteristische Merkmal, dass zwei Permutationen nach einander angewandt wieder eine der ausgewählten Permutationen ausmachen.[3]) Sie bilden die *Gruppe der Gleichung*.[4]) Die Frage nach der algebraischen Auflösbarkeit einer Gleichung wird durch eine besondere Eigenschaft dieser Gruppe erledigt. Der ganze Komplex von Pro-

1) *Mémoires d'Alex. Dumas*, a. a. O. pg. 81.

2) *E. Galois*: Oeuvres math. a. a. O. pg. 25.

3) *E. Galois*: Oeuvres math. a. a. O. pg. 36.

4) *E. Galois*: Oeuvres math. a. a. O. pg. 39.

blemen wird auf die „*Gruppentheorie*" zurückgeführt; der mathematische Gedanke ist geboren. Das spezielle Problem der Algebra hat durch aufeinanderfolgende Abstraktionen zu einem neuen tiefen Gedanken, der *Gruppe* geführt. Endlich viele Operationen sind gegeben, wobei stets zwei nacheinander ausgeführte Operationen durch eine einzige ersetzt werden können.[1]) Auf die Eigenschaften einer Gruppe ist Galois selbst noch eingetreten; er erfasste den wichtigsten Begriff, denjenigen der *invarianten Untergruppe*.[2]) Die Gruppentheorie erscheint so logisch von der Algebra völlig losgelöst, und es ist verständlich, dass sie im Laufe der Zeit fast sämtliche Gebiete der Mathematik befruchtete. 1872 hat *Felix Klein* in seinem berühmten *Erlanger Programm*[3]) die Gruppe als tiefstes Einteilungsprinzip der Geometrie erkannt. Lange Zeit nach Galois' Tod sind seine Ideen brachgelegen. Durch eine merkwürdige Fügung sind sie von *Liouville* 1846,[4]) und 1870 von *Camille Jordan*[5]) so aufgenommen worden, dass sie heute Allgemeingut des Mathematikers geworden sind.

La Rochefoucauld hat der 4. Auflage seiner Maximes[6]) (1675) das Epigramm vorangestellt: „Nos vertus ne sont le plus souvent que des vices déguisés." Ich möchte entsprechend fragen: Ist die mathematische Gedankenbildung, wie ich sie im vorhergehenden zu charakterisieren versuchte, nur dem Fachmann „tugendhaft", d. h. gross und tief, und werden nicht vielleicht, dank einer komplizierten Begriffsbildung, Fehler und „Laster" verdeckt, die dem Laien den *wirklichen* Gedanken verdunkeln? Haben *Goethe*[7]) oder *Schopenhauer*[8]) mit ihren Angriffen auf die mathematischen Wissenschaften nicht doch das

[1]) Auf die übrigen zur Definition nötigen Voraussetzungen gehe ich hier nicht ein.

[2]) *E. Galois:* Oeuvres math. pg. 25 u. 26.

[3]) *Felix Klein:* Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872.

[4]) Journal de mathématiques pures et appliquées, t. XI (1846). Paris, Bachelier, pg. 381.

[5]) *C. Jordan:* Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars, 1870.

[6]) *Oeuvres de La Rochefoucauld,* Paris 1868, t. 1, pg. 31.

[7]) *Sprüche in Prosa:* Über Naturwissenschaft. Vierte und fünfte Abteilung.

[8]) *Die Welt als Wille und Vorstellung.* 1. Buch, § 15.

Richtige getroffen? Diese Frage wird in mancher Hinsicht durch die Betrachtung eines zweiten mathematischen Gedankens beantwortet, der einer in neuester Zeit mehr von Laien als von Mathematikern behandelten Aufgabe entspringt. Wenn der mathematischen Begriffsbildung keine innere Notwendigkeit zukommt, so müssten von Forschern, die derselben ganz ferne stehen, neue Wege und Methoden aufgedeckt werden.

Die 8. Aufgabe des 2. Buches der Arithmetik des antiken Mathematikers *Diophant* verlangt, eine Quadratzahl in die Summe von zwei Quadratzahlen zu zerlegen. Etwa im Jahre 1659[1]) hat der grosse französische Zahlentheoretiker *Pierre Fermat*, Parlamentsrat in Toulouse, an den Rand seiner Diophant-Ausgabe geschrieben: „Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas eiusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."[2]) Fermat behauptet somit, dass niemals eine n. Potenzzahl in eine Summe von zwei n. Potenzzahlen zerlegbar sei, falls n grösser als zwei ist. Den unaufgezeichneten Beweis dieses Theorems, das als *letztes Theorem Fermats* bezeichnet wird, wieder aufzufinden, haben sich seither *alle* Mathematiker abgemüht; aber umsonst. Trotz dieses Misserfolges hat das Problem wie bei der Auflösbarkeit der Gleichungen Anlass zu einem neuen mathematischen Gedanken gegeben und zur tiefsten Errungenschaft der modernen Zahlentheorie geführt.

Der erste, der einen erfolgreichen Beitrag zum Fermat-Problem beisteuerte, war *Leonhard Euler*, der den Satz 1765 in seiner Algebra für Kubikzahlen bewies.[3]) 1825 folgten die Beweise von *Legendre*[4]) und *Lejeune-Dirichlet*[5]) für 5. Potenzen.

[1]) Vermutung. Siehe *P. Tannery:* „Sur la date des principales découvertes de Fermat". Bulletin des sciences math. 2e série, t. VII (1883). Paris, Gauthier-Villars, pg. 123 u. ff.

[2]) *Oeuvres de Fermat,* t. I. Paris, Gauthier-Villars, 1891, pg. 291. Das Fermatsche Exemplar ist heute verloren (pg. XVI).

[3]) *Leonhardi Euleri:* Opera omnia. Lipsiae et Berolini (1911), vol. I, pg. 486, art. 243.

[4]) *A. M. Legendre:* Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'institut de France, t. VI, année 1823, Paris, Didot, 1827, pg. 1.

[5]) *G. LejeuneDirichlets Werke.* Berlin, Reimer, 1889, t. I, pg. 23 u. ff.

Ohne merklichen Gewinn konnte der Satz noch für einige weitere spezielle Exponenten bezwungen werden. Eine Wendung trat erst ein, als sich 1842 der grosse deutsche Zahlentheoretiker *Eduard Kummer*[1]) dem Problem zuwandte. Er konnte bald Dirichlet einen Beweis vorlegen. Dirichlet las denselben und gab ihn nach einigen Tagen mit der Bemerkung zurück, der Beweis sei ausgezeichnet und gewiss auch richtig, wenn es feststände, dass für die von Kummer behandelten Zahlen der Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primzahlen gültig sei.[2]) Dieser Einwurf, dessen Begründetheit Kummer sofort verstand, war niederschmetternd. Er zwang ihn, die Zahlentheorie durch Erfindung der *idealen Zahlen*[3]) auf einen ganz neuen Boden zu stellen. So hat Fermats Problem den fruchtbaren mathematischen Gedanken der Idealtheorie erzeugt. *Richard Dedekind* hat den zweiten Schritt der Abstraktion durchgeführt; er hat den Kummerschen Gedanken von allen Äusserlichkeiten gesäubert und seinen logischen Gehalt durch Definition des *Ideals* herausgearbeitet.[4]) Wie der menschliche Geist die gebrochenen oder die negativen Zahlen einführte, um stets teilen oder subtrahieren zu können, so sind die Ideale notwendig hinzugetreten, um die Eindeutigkeit der Zerlegung in Faktoren zu erreichen.

Für das *letzte Problem Fermats* sind die Resultate Kummers und seiner Nachfolger recht dürftig. Mit knapper Not gelang der Beweis für alle Exponenten unterhalb hundert.[5]) Weiter

[1]) *E. Kummer:* Crelles Journal für die reine und angewandte Math., Bd. 40 (1850), pg. 130.

[2]) *K. Hensel:* Gedächtnisrede auf Ernst Eduard Kummer, Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages E. Kummers. Leipzig-Berlin, Teubner, 1910, pg. 22.

[3]) Briefe Ernst Ed. Kummers an Leopold Kronecker, Festschrift a. a. O., pg. 64 u. ff.

[4]) *Richard Dedekind:* XI. Supplement der Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet, 4. Auflage. Braunschweig, Vieweg, 1894, pg. 551.

[5]) *E. Kummer:* Einige Sätze über die aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten complexen Zahlen, für den Fall, dass die Klassenanzahl durch λ teilbar ist, nebst Anwendung derselben auf einen weiteren Beweis des letzten Fermatschen Lehrsatzes. Abhandlungen der Kgl. Akademie der Wiss. zu Berlin, 1857, Berlin, pg. 73. Die Behauptung in *Hilbert*, Die Theorie der algebr. Zahlkörper (Jahresbericht der Deutschen Math. Ver., IV. Bd., 1894-95, Berlin, Reimer, 1897), pg. 523, der Beweis sei von Kummer erbracht, falls die Klassenzahl einmal durch λ teilbar ist, ist nicht richtig. Vgl. zur Geschichte des Problems auch: *P. Bachmann:* Das Fermatproblem, Berlin-Leipzig, Vereinigung wiss. Verleger, 1919.

weiss man auch heute nichts. Im Gegenteil sind berechtigte Zweifel an der Richtigkeit des Satzes für grössere Exponenten aufgetreten.[1])

Am 27. Juni 1908 hat die Göttinger Societät der Wissenschaften die *Wolfskehl-Stiftung* von hunderttausend Mark für die Lösung des Fermat'schen Problems in positivem oder negativem Sinne ausgeschrieben[2]) und damit die Frage in weiteste Kreise hinausgetragen. In freier Konkurrenz können sich die Glücksritter, die der Preis lockt, an den mathematischen Ideen versuchen. Hunderte von „Lösungen" sind so entstanden. Ich sehe von den Berufsmathematikern wie *Lindemann*[3]) und *Fabry*[4]) unter den Opfern der Preisfrage ab und möchte Person und Leistung der übrigen an Ihnen vorbei ziehen lassen, um nachher den zu Tage geförderten Gedanken und Methoden nachzuspüren. Die Verfasser gehören allen Lebensaltern, allen Völkern, allen Schichten und Berufen an: Oberlehrer, Pfarrer, Ingenieure, Ärzte, Richter, Apotheker, Baumeister, Buchhalter, Minister, Postangestellte, Offiziere, Studenten.[5]) Der Umfang der Arbeiten variiert von einer Seite bis zu ansehnlichen Broschüren. Inhaltlich ist bezeichnend, dass häufig das Problem selbst schon missverstanden ist, indem die Verfasser glauben, dieselben drei Zahlen sollen die Fermat'sche Gleichung für 2., 3., allgemein n. Potenzen erfüllen. Oder sie verwechseln numerische und algebraische Teilbarkeit und beweisen den Satz, dass die Fermat'sche Gleichung nicht durch ganze rationale Funktionen lösbar sei.

Und dann die Methoden und Schlussweisen! Fast immer wird mit dem binomischen Satz die einfache Fermat'sche Behauptung so lange kompliziert, bis ein Rechnungsfehler den ge-

[1]) Vgl. *R. Fueter:* Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. Sitzungsbericht Heidelb. Akad. der Wiss., 1913, pg. 5.

[2]) Siehe Mathematische Annalen, Leipzig, Teubner, 1908, Bd. 66, pg. 143.

[3]) *F. Lindemann:* Über das sogenannte letzte Fermatsche Theorem. Sitzungsbericht math.-phys. Klasse der Kgl. bayr. Akad. der Wiss., 1907, pg. 287.

[4]) Siehe *Mirimanoff:* Remarque sur une communication de M. E. Fabry. Comptes-rendus. acad. des sciences, Paris, t. 157, pg. 491 (1913).

[5]) Siehe die sehr verdienstvolle Verarbeitung von *Fleck*, *Perron* und *Maennchen:* Archiv der Math. und Physik. Leipzig-Berlin, Teubner. Bd. 14 (1909), pg. 284 und 370; Bd. 15 (1909), pg. 108, 285 u. 370; Bd. 16 (1910), pg. 105, 279 und 372; Bd. 17 (1911), pg. 108, 285 u. 370; Bd. 18 (1911), pg. 105, 204 u. 288.

wünschten Widerspruch bringt. Von neuen Gedanken keine Spur! Die alten ausgetretenen Wege werden immer wieder beschritten, wobei hauptsächlich folgende Fehlschlüsse auftreten: Wenn eine Potenz durch eine Zahl teilbar ist, so ist es die Basis der Potenz ebenfalls; und wenn ein Produkt durch eine Zahl teilbar ist, so muss es einer der Faktoren auch sein; Sätze, die nur für Primzahlteiler gelten. Die Verfasser klammern sich an die formale Darstellung und an formales Rechnen. So ist der Wert dieser ganzen ungeheuren Arbeit bisher vollständig null gewesen. Die Vorwürfe, der Berufsmathematiker dringe zu wenig in die innern Gründe ein, halte an einer Geheimsprache fest, fallen umgekehrt auf den Kreis der Laienforscher zurück.

Im Gegenteil! Wenn ich zu dem Ausgangspunkte zurückkehre und nach dem Zwecke mathematischer Forschung frage, so liegt er gerade in der Abkehr vom Formalen und in dem Eindringen in die innern Gründe der Verkettungen mathematischer Grössen. Durch richtige, klare und einfache Begriffe bringt der Mathematiker Ordnung in die unendliche Mannigfaltigkeit der Spekulation. Ich sehe in der präzisen Formulierung, Aufdeckung und Durchforschung einfacher, allgemeiner und umfassender Gedanken, wie etwa des Gruppenbegriffes, die Hauptaufgabe der mathematischen Forschung.

Wenn ich auch im vorhergehenden die Persönlichkeit des Forschers charakterisieren musste, so bleibt doch der Weg, der im Gehirn des Einzelnen zu neuen Gedanken führt, im Tiefsten ein Rätsel. Anschaulich schildert *Gauss* in einem Brief an *Bessel* die vielen Möglichkeiten, die im Kopfe des Mathematikers auftreten müssen, bis die richtige kommt: „Sie (die Untersuchungen über höhere Arithmetik) gehören zu der Gattung derjenigen, wo man nicht im voraus sagen kann: diess will ich tun, sondern wo, vielleicht nach 999 misslungenen Versuchen, eine glückliche 1000te Combination zum Ziele führt.[1])" Und nach vierjährigem vergeblichen Versuche berichtet er über die endliche Lösung des Knotens an Olbers: „Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den lei-

[1]) *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Leipzig 1880, Nr. 91 vom 23. Dezember 1816, pg. 247.

tenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, — und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen."[1]) *Henri Poincaré* hat das Problem der mathematischen Erfindung tiefer verfolgt.[2]) Auch für ihn heisst es, unter den unendlich vielen Kombinationen die richtige zu finden. „Inventer, c'est discerner, c'est choisir."[3]) Was aber für Poincaré das Entscheidende ausmacht, ist die Rolle, die das *Unbewusste* bei mathematischen Entdeckungen spielt. „Le rôle de ce travail inconscient dans l'invention mathématique me paraît incontestable."[4]) Er schreibt dem Unbewussten die Fähigkeit zu, unter den möglichen Kombinationen die unnützen auszusieben und die richtigen zu finden. Die letztern vermögen dank ihrer Schönheit und Eleganz die Empfindung zu reizen und dadurch dem Forscher bewusst zu werden.[5]) Die scheinbare Plötzlichkeit der mathematischen Inspiration würde durch diese Erklärung ihren psychologischen Grund erhalten.

Meine Ausführungen wollen keine historischen sein. Sie sollten nur die Etappen der Entwicklung mathematischer Ideen vor Augen führen. Sie lehren zweierlei: Die fruchtbaren Gedanken entwickeln sich immer an *speziellen* Problemen. Die moderne Mathematik hat oft vergessen, dass ihre Spekulationen nur dann Bürgerrecht besitzen, wenn sie aus einer notwendigen Aufgabe, aus einem tiefen Problem herauswachsen. Sie hat sich ferner davor zu hüten, in inhaltsleere Beherrschung äusserer Formen zu verfallen. Stets muss der mathematische Gedanke schlackenfrei die innersten Zusammenhänge frei von der äussern Form aufdecken. Dann bietet er dem Forscher eine seltene Quelle des Genusses.

[1]) *W. Olbers:* Sein Leben und seine Werke. Bd. II: Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Berlin, Springer, 1900. Nr. 133 vom 3. September 1805, pg. 268.

[2]) *Henri Poincaré:* L'invention mathématique. La Revue du mois, t. VI (1908), pg. 9. Vgl. auch die Enquête von *Fehr und Laisant* im „L'enseignement mathématique", Paris-Genève, t. 7 (1905), pg. 63, 239, 387 u. 473; t. 8 (1906), pg. 43, 217, 293, 383 u. 463; t. 9 (1907), pg. 123, 204, 306 u. 473; t. 10 (1908), pg. 152.

[3]) *H. Poincaré* a. a. O. pg. 12.

[4]) *H. Poincaré* a. a. O. pg. 15/16.

[5]) *H. Poincaré* a. a. O. pg. 18/19.