

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER VEREINIGUNG

HERAUSGEBER: L.BIEBERBACH
O.BLUMENTHAL/G.FABER

39. BAND
9.-12. HEFT

Sonderabdruck

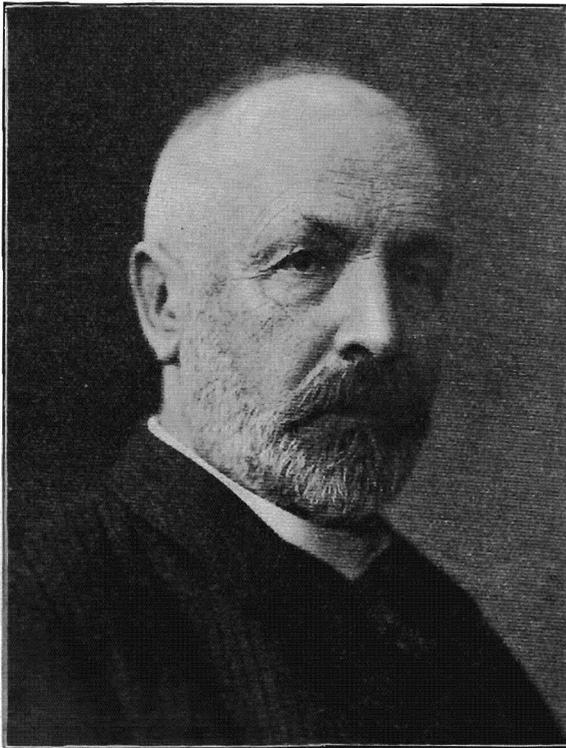
1930
BERLIN-B.G. TEUBNER-LEIPZIG

Georg Cantor.¹⁾

Von A. FRAENKEL in Kiel, z. Zt. in Jerusalem.

Mit einem Bildnis.

I. Entwicklung und Persönlichkeit.



Georg Cantor.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp²⁾ Cantor, der Schöpfer der Mengenlehre, wurde am 19. Februar alten Stils (3. März n. St.) 1845 in Petersburg geboren. Sein Vater Georg Wolde-
mar Cantor war aus Kopenhagen gebürtig; er hatte in Petersburg, wohin er in jungen Jahren gekommen war, ein Maklergeschäft inne, das er unter seinem eigenen Namen, zeitweise auch unter der Firma „Cantor & Co.“ betrieb. Als tüchtiger und erfolgreicher Kaufmann brachte er es zu bedeutendem Wohlstand und hinterließ bei seinem Tode

(1863) ein recht beträchtliches Vermögen; er scheint sowohl in Petersburg wie später in Deutschland sich hohen Ansehens erfreut zu haben.

1) Für die Überlassung des recht spärlichen und sehr verstreuten ungedruckten Materials, dessen ich zum *Leben* Cantors (den ich nicht mehr persönlich gekannt

Eines Lungenleidens wegen übersiedelte er mit seiner Familie 1856 nach Deutschland und nahm bald seinen Wohnsitz in Frankfurt a. M., wo er als Rentner lebte. Die Mutter, Maria geb. Böhm, die ihren Gatten um 33 Jahre überlebte, entstammte einer kunstbegabten Familie, deren Einschlag sich offenbar im Phantasie_reichtum des Sohnes fühlbar machte. Der Großvater Ludwig Böhm war Kapellmeister, dessen in Wien lebender Bruder³⁾ Josef war Lehrer des berühmten Violinvirtuosen Joachim; auch Maria Cantors Bruder war Musiker, ihre Schwester Annette hatte eine Tochter (Olga), die Malerin (besonders Karrikaturistin) und Lehrerin an der Münchener Kunstgewerbeschule war. Bei den Geschwistern Georg Cantors selbst ist die künstlerische Ader gleichfalls merkbar: sein als Dragoner-Rittmeister a. D. gestorbener Bruder Constantin war ein talentvoller Klavierspieler, seine noch in Berlin lebende Schwester Sophie Nobiling geb. Cantor ist zeichnerisch besonders begabt.

Der talentvolle Junge, der in Petersburg die Elementarschule besucht hatte, zeigte schon frühzeitig den brennenden Wunsch, das Studium der Mathematik zu ergreifen. Sein Vater war indes hiermit nicht einverstanden, sondern hielt das Brotstudium des Ingenieurfaches für geeigneter; der Sohn fügte sich zunächst und bezog, nachdem er vorübergehend das Gymnasium in Wiesbaden sowie Privatschulen in Frankfurt a. M. besucht hatte, Ostern 1859 die Großherzoglich Hessische Provinzialrealschule in Darmstadt, an der auch Latein Lehrgegenstand war, um von ihr 1860 in den unteren allgemeinen Kursus der Großherzoglichen Höheren Gewerbeschule (späteren Technischen Hochschule) überzutreten. Lebhaften Eindruck von der Art, in der der Vater die Erziehung leitete, wie auch von den großen Hoffnungen, die er auf den Sohn setzte, gibt ein Brief, den der Vater ihm zu seiner Konfirmation Pfingsten 1860 sandte; es heißt darin:

habe) habhaft werden konnte, habe ich neben vielen anderen besonders auch C.s Tochter, Frau Gertrud Vahlen in Halle a. S., zu danken. Angesichts der über die Grenzen der Mathematikgeschichte noch hinausgehenden, innerhalb dieser Grenzen gewiß ganz außerordentlichen Bedeutung C.s wurde das erreichbare Material trotz seiner zeitlichen und sachlichen Ungleichmäßigkeit so vollständig als tunlich verwertet.

Für höchst wertvolle Unterstützung bei der Durcharbeitung des größeren Teiles der *Veröffentlichungen* C.s bin ich Herrn Pleßner-Gießen zu großem Dank verpflichtet.

Die in eckige Klammern gesetzten arabischen und römischen Ziffern verweisen auf das am Schluß stehende Verzeichnis von Publikationen C.s und von Material zu seinem Leben und Schaffen.

2) Zu S. 189. So nach dem Taufschein (in [VII] Louis Philippe).

3) Also ein Onkel, nicht ein Bruder Maria Cantors (wie in [IX], S. 556, angegeben).

„Geliebter George! Möge durch die Güte des Allmächtigen, des Schöpfers des Weltalls und Vaters aller belebten Wesen, dieser Tag von segensreichem Einfluß auf Dein ganzes künftiges Leben werden! Mögest Du immerfort und unablässig vor Augen behalten alle die tugendhaften Vorsätze, die Du Dir heute ohne Zweifel im Stillen zum Gelöbniß gemacht hast! . . . Die künftigen *Lebenswege* und Schicksale des Menschen liegen im tiefsten Dunkel verborgen vor ihm. Und es ist gut, daß es so ist. Niemand weiß vorher, in welche unglaublich schwierigen Lagen und Berufsverhältnisse er zufällig geraten, mit welchen unvorhergesehenen und *unvorherzusehenden* Widerwärtigkeiten und Schwierigkeiten er in den verschiedenen Lagen des Lebens anzukämpfen haben wird.

. . . Wie oft sind nicht schon die allerhoffnungsvollsten Menschen, nachdem sie ins praktische Leben eingetreten, schon in den ersten ernstlichen Kämpfen nach kurzem ohnmächtigem Widerstand erlegen. Mutgebrochen verkümmerten sie hinterher vollständig — im *günstigsten* Fall wird noch aus ihnen ein sogenanntes verkommenes Genie! . . . So enden *wahrlich nicht selten* junge Menschen, die *scheinbar* mit den vielversprechendsten Eigenschaften des Geistes sowohl wie des Körpers ausgestattet und deren Aussichten fürs spätere Leben auch durch Vermögen und Familienverhältnisse in ihrer Jugend die allerrosigsten von der Welt waren!

Doch — ihnen *fehlte der feste Kern*, auf den *alles* ankommt! Nun, mein teurer Sohn! — *glaube es mir*, Deinem *aufrichtigsten, treuesten und erfahrensten* Freunde — dieser feste Kern, *der in uns leben muß*, das ist: ein *wahrhaft religiöses Gemüt*! Dies offenbart *sich uns selbst* durch ein *aufrichtiges demütiges Gefühl dankbarster Gottesverehrung*, aus welcher denn auch das *siegreiche, unerschütterlich feste Gottesvertrauen erwächst* und uns unser ganzes Leben hindurch in jenem stillen zuversichtlichen Verkehr mit unserem himmlischen Vater erhält!

. . . Um aber auch *allen jenen anderen* Drangsalen und Schwierigkeiten zu begegnen, die im eifrigen Streben nach Erfolg und Glück in unserer *eigentlichen Fach- oder Berufstätigkeit* durch Neid und Verleumdung offener oder geheimer Feinde unausweichlich sich uns entgegentürmen, um *auch diese* mit *Erfolg* zu bekämpfen, dazu gehört in erster Reihe die Erwerbung und Aneignung der größtmöglichen Summe gründlichster, vielseitigster Fachkenntnisse und Fähigkeiten. Diese sind heutzutage eine *unbedingte Notwendigkeit*, wenn der strebsame und ehrgeizige Mann sich nicht von seinen Feinden verdrängt und sich selbst in zweiter oder dritter Linie stehend sehen will.

Zur Erlangung vielfacher gründlicher wissenschaftlicher und praktischer Kenntnisse, zur *vollkommenen* Aneignung fremder Sprachen und Literaturen, zur vielseitigen Bildung des Geistes, auch in manchen humanistischen Wissenschaften — um durch all dieses erst *Dich würdig auszuwüsten* zu *jenen Kämpfen* — *dazu* ist nun, dieses mußt Du Dir *immerfort wohl* bewußt bleiben! — *dazu* ist die eben angetretene *zweite Periode* Deines Lebenslaufes, *das Jünglingsalter*, *bestimmt*. Was der Mensch aber in *dieser Periode* versäumt oder durch *vorzeitige* Vergeudung seiner besten Kräfte, Gesundheit und Zeit, sozusagen *verludert*, das ist unwiederbringlich und *unersetzlich* für *ewig verloren*; — gleich der *einmal* verlorenen Unschuld, die für immer und ewig unrettbar verloren bleibt! . . .

Ich schließe mit den Worten: Dein Vater oder vielmehr Deine Eltern und alle übrigen Familienangehörigen sowohl in Deutschland wie in Rußland und Dänemark haben ihre Augen auf *Dich* als den Ältesten gerichtet und erwarten von Dir nichts *Geringeres* als einen Theodor Schaeffer¹⁾ und, so Gott will, später vielleicht auch ein *leuchtendes Gestirn* am Horizonte der Ingenieure.

1) [Wie es scheint, Lehrer an dem Internat, in dem C. untergebracht war.]

Gott gebe Dir *Kraft*, Ausdauer, Gesundheit, Charakterfestigkeit und seinen besten Segen! Aber darum wandle *Du* auch nur auf seinen Wegen. Amen!

Dein Vater . . .“

Dieser bemerkenswerte Brief wurde hier in so weiten Teilen angeführt, nicht bloß um die Höhe und Weite der Lebensauffassung des Vaters Cantor und die ganz besonderen Hoffnungen, die auf den ältesten Sohn gesetzt wurden, zu kennzeichnen, sondern auch weil dieser Brief, den C. zeitlebens aufgehoben hat, manches enthält, was in seinem späteren Leben zur Geltung kommen sollte. Der Mahnung, sich aller Gegnerschaft zum Trotz aufrechtzuerhalten und durchzusetzen, hat C. in schweren Stürmen nur zu sehr bedurft; vielleicht ist es z. T. solch väterlicher Erziehung zu danken, wenn der schöpferische Geist nicht vorzeitig gebrochen und die Nachwelt nicht um seine Früchte betrogen worden ist. Für den im obigen Brief besonders stark zum Ausdruck kommenden religiösen Einschlag der Erziehung, den wir gleichfalls noch viel später *fortwirkend* erkennen werden, ist nicht minder charakteristisch ein Brief, den der Vater am 18. August 1862 von Rigi-Kaltbad aus dem Sohn *anlässlich* seiner Schlußprüfung an der Gewerbeschule sandte und in dem es heißt: „. . . Gott schenke Dir Segen und Glück zu dem heute beginnenden Examen. Amen! — In kritischen Lagen des Lebens ein festes, frohes Gottvertrauen und ein *tiefinnig-gefühltes Gebet* zum allmächtigen Geber alles Guten vor Beginn des Tagewerks gibt Festigkeit, Mut und Selbstvertrauen! Und somit Gott befohlen, frisch, froh und heiter ans Werk! . . .“

Der Sohn wurde im evangelisch-lutherischen Glauben erzogen, dem der Vater (mindestens schon 1845) angehörte. Doch wird in der späteren Einstellung und den Interessen C.s neben lebhafter Religiosität überhaupt auch die besondere Beziehung zum Katholizismus bemerkbar, die er durch seine katholische Mutter besaß.

In seinem Abgangszeugnis (September 1860) von der Darmstädter Realschule, das in allen Fächern wie auch in Fleiß und Betragen gute Zensuren enthält, heißt es betr. Mathematik: „Sein Fleiß und Eifer musterhaft; seine Kenntnisse in der Niederen Mathematik inkl. Trigonometrie sind sehr gut; Leistungen lobenswert.“ Die Zensur in darstellender Geometrie lautet: „Fleiß, Aufmerksamkeit und Leistungen vorzüglich.“ Für seine Leistungen in der Höheren Gewerbeschule, die er in der unteren und der oberen allgemeinen Abteilung je ein Jahr besuchte, erhielt er im August 1862 das Zeugnis: „Er zeigte sich als sehr begabter und höchst strebsamer Schüler.“ Weiter unterwarf er sich zwecks Studiums der Naturwissenschaft im Herbst 1862 einer (auch die Sprachen umfassenden) Reifeprüfung, deren — in den

meisten Fächern „sehr gutes“ — Ergebnis „als Maturitätszeugnis Nr. 1 für das Studium der Naturwissenschaft anerkannt“ wird.

Schließlich blieb die tiefe Neigung zur Mathematik, die C. nach wie vor beseelte, nicht ohne Eindruck und Wirkung auf seinen Vater. Dessen Verehrung gegenüber der Wissenschaft wird namentlich durch einen Brief bezeugt, in dem er am 19. Oktober 1861 seinem Sohne nach Darmstadt schreibt: „... Ich freue mich natürlich auch, daß der neu angefangene obere Kursus Dein Interesse für alle Wissenschaften neu auflodern läßt. Hege und pflege die Liebe zu den Wissenschaften, gleich wie das heilige Feuer der Vestalinnen gepflegt wurde, deren brennende Lampe nie ausgehen durfte! Die ewige, nie zu verlöschende und sorgfältig zu pflegende Lampe der Wissenschaft ist aber ein heiligeres und reineres Feuer, als jene es war. Pflegt der Mensch diese Lampe je nach seinen *individuellen* Fähigkeiten, so hat er seine Schuldigkeit getan...“ Der Sohn konnte sich für die Einwilligung des Vaters zu seinen Plänen durch folgenden Brief an ihn bedanken, der vom 25. Mai 1862 aus Darmstadt datiert ist und der den ältesten erhaltenen Brief C.s darstellt: „Mein lieber Papa! Wie sehr Dein Brief mich freute, kannst Du Dir denken; er bestimmt meine Zukunft. Die letzten Tage vergingen mir im Zweifel und der Unentschiedenheit; ich konnte zu keinem Entschluß kommen. Pflicht und Neigung bewegten sich in stetem Kampfe. Jetzt bin ich glücklich, wenn ich sehe, daß es Dich nicht mehr betrüben wird, wenn ich in meiner Wahl dem Gefühle folge. Ich hoffe, Du wirst noch Freude an mir erleben, teurer Vater, denn meine Seele, mein ganzes Ich lebt in meinem Berufe; was der Mensch will und kann, und wozu ihn eine unbekannte, geheimnisvolle Stimme treibt, *das* führt er durch!...“

Im Herbst 1862 nahm C. sein Studium in Zürich auf; aus den dorthin gerichteten Briefen seines Vaters ersehen wir, wie dieser um die musikalische Fortbildung des Sohnes nicht minder besorgt ist als z. B. um die Einrichtung eines strengen Systems und Planes der Tagesbeschäftigungen, worüber er schreibt: „... dieses ist für einen künftigen Gelehrten, wie mir *dünkt* — nein ich *weiß*, daß es so ist — eigentlich was Unerläßliches...“ Nach dem ersten Semester mußte C. infolge des Todes seines Vaters im Frühjahr 1863 Zürich verlassen. Vom Herbst dieses Jahres an studierte er Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, wo das Dreigestirn Kummer, Weierstraß, Kronecker die besten Begabungen anzog und auf den (damals noch recht kleinen) Hörerkreis Anregungen nach den verschiedensten Richtungen ausstrahlte. Nur das Sommersemester 1866 verbrachte er in Göttingen. Den weitaus größten Einfluß auf seine wissenschaftliche

Entwicklung hat Weierstraß ausgeübt. Es ist bemerkenswert und gleichermaßen für die Weite des Gesichtskreises von Weierstraß wie für sein vorurteilsfreies und vorausblickendes Urteil bezeichnend, daß er die tiefe Verehrung, die sein Schüler ihm entgegenbrachte und unbeschadet vorübergehender Trübungen zeitlebens bewahrt hat, mit einem frühzeitigen verständnisvollen Eingehen auf dessen neuartige Ideen erwiderte.¹⁾ Nach Angabe von Lampe²⁾ hat C. in seiner Berliner Zeit außer dem Mathematischen Verein noch einem engeren Kreis junger Fachgenossen angehört, die sich allwöchentlich in der Rähmelschen Weinstube trafen; außer gelegentlichen Gästen umfaßte dieser Kreis namentlich noch Henoeh (den nachmaligen Herausgeber der „Fortschritte“), Lampe, Mertens, Max Simon, Thomé, unter denensich der letztgenannte besonders eng an C. anschloß. Ferner gehörte zu seinen Berliner Studiengenossen der um zwei Jahre ältere H. A. Schwarz, der indes entgegen dem Beispiel seines Lehrers Weierstraß den Ideen C.s im weiteren Verlaufe lebhaftes Mißtrauen entgegenbrachte.³⁾

Am 14. Dezember 1867 promovierte C. auf Grund tiefergehenden Studiums der *Disquisitiones arithmeticae* sowie der Zahlentheorie Legendres an der Berliner Universität mit der von der Fakultät als „dissertatio docta et ingeniosa“ bezeichneten Arbeit [I], die seinen und seiner Geschwister Vormündern Eduard Flersheim und Bernhard Horkheimer gewidmet ist; im mündlichen Examen erhielt er „magna cum laude“. Gegen die schon promovierten Kollegen Simon, Henoeh und Lampe verteidigte er dabei die Thesen: I. In arithmetica methodi mere arithmeticae analyticis longe praestant. II. Num spatii ac temporis realitas absoluta sit, propter ipsam controversiac naturam dijudicari non potest. III. In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi. Zeugt die zweite These von den schon auf der Universität mit Ernst begonnenen philosophischen Studien, so ist die dritte charakteristisch für die mathematische Zielsetzung C.s. Selbst auf dem Gebiet der Mengenlehre sind ja die von ihm erreichten Resultate vielleicht nicht ganz so wesentlich wie die revolutionären Problemstellungen, die noch so weit über sein eigenes Werk hinaus fortwirken.

1) Vgl. auch S. 199 f. Von dem (offenbar sehr losen) Briefwechsel, der 1876—1891 zwischen C. und Weierstraß bestanden hat, ist außer dem von C. selbst in [35] veröffentlichten Schlußbrief mir nichts zugänglich geworden.

2) Vgl. Engel in diesem *Jahresbericht* 20 (1911), S. 265.

3) Persönliche Erinnerung aus dem Berliner Mathematischen Seminar von 1912/13.

Es scheint, daß C. in Berlin kurze Zeit an einer Mädchenschule unterrichtet hat; jedenfalls war er 1868, nach bestandener Staatsprüfung, Mitglied des Schellbachschen Seminars für Lehrer der Mathematik.

Die Habilitationsschrift [5], auf Grund deren sich C. im Frühjahr 1869 als Privatdozent in Halle niederließ, gehört ebenso wie einige kleinere in den Jahren 1868—72 veröffentlichte Noten noch diesem seinem ersten, arithmetischen Arbeitsgebiete an, auf das er später nur mehr vereinzelt zurückgekommen ist. Dennoch ist ihm diese wohl vornehmlich von Kronecker angeregte Beschäftigung mit der Zahlentheorie nicht eine bloß zufällige Angelegenheit gewesen, sondern die besondere Reinheit und Schönheit dieser Disziplin hat sich ihm tief innerlich geoffenbart; dies zeigt außer der erwähnten ersten Doktorthese auch die dritte der bei seiner Habilitation verteidigten Thesen: „Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere.“

Heine, der in Halle damals als Ordinarius wirkte, erkannte sogleich, in wie glücklicher Weise C. mit ungewöhnlichem Scharfsinn eine außerordentliche Phantasie verband (siehe [VI]). Es wurde von entscheidender Bedeutung, daß er den jungen Kollegen alsbald nach seiner Niederlassung in Halle anregte, sich mit der Theorie der trigonometrischen Reihen zu beschäftigen (vgl. [6], S. 130, Fußnote). Der Eifer, mit dem sich C. auf diesen Gegenstand stürzte, zeitigte nicht nur an und für sich eine Reihe wesentlicher Erfolge, sondern führte ihn auch den Weg zur Theorie der Punktmengen und gleichzeitig zu den transfiniten Ordnungszahlen, wie die 1872 erschienene Abhandlung [10] zeigt. Diese enthält einerseits die ersten Grundbegriffe der Punktmengenlehre, namentlich den Begriff der Ableitung, aus dem C. schon um 1870 der Gedanke der transfiniten Zahlen erwachsen war (vgl. [16 II], S. 358 Fußnote, sowie die in [V], S. 32 Fußnote, angeführte briefliche Äußerung C.s); andererseits findet sich hier die Leistung, die nächst der Mengenlehre vornehmlich C.s Namen unsterblich gemacht hat: seine Theorie der Irrationalzahlen als Fundamentalreihen.¹⁾ Auch die Erkenntnis der Notwendigkeit, bei der Begründung der Geometrie ein Axiom von der Art zu verwenden, wie es heute unter dem Namen Cantorsches Axiom bekannt ist, begegnet uns in diesem Aufsatz; gleichzeitig und unabhängig von ihm erschien Dedekinds Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“, mit der sich C. wiederholt und intensiv (auch in der Korrespondenz

1) Die von Heine in seinen *Elementen der Funktionenlehre* (*Journ. f. Math.* 74 [1872], S. 172—188) entwickelte Einführung der Irrationalzahlen geht ganz und gar auf C.s Ideen zurück; vgl. die Einleitung zu Heines Aufsatz, sowie [28 I], S. 90.